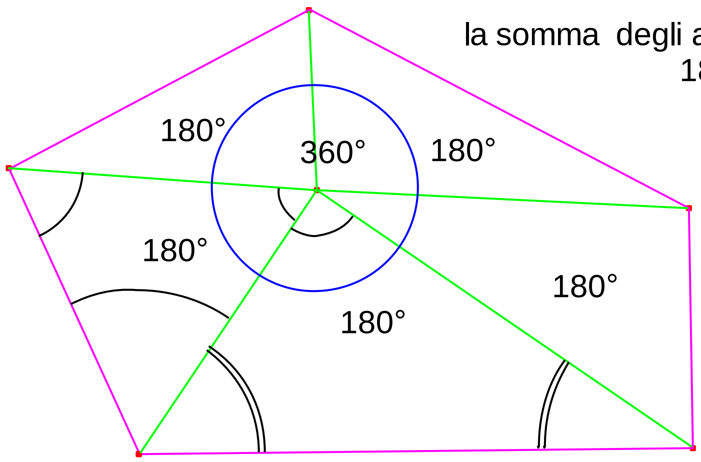
Somma degli angoli interni di un poligono

Soluzioni Scheda 1

Possibili soluzioni:



la somma degli angoli interni del poligono di 5 lati è
180x5 - 360

180x5 - 180x2

180x(5-2)

in un poligono di n lati, la somma vale

180x(n-2)

Alla soluzione si arriva in genere con la formula: Somma int. = $180\cdot n-360$
Essa conserva ancora tracce chiare del ragionamento seguito: tanti angoli piatti quanti sono i triangoli costruiti sui lati, meno l'angolo giro al centro.
Ma, al fine di averei una formula più semplice da ricordare e da usare, si preferisce trasformarla nel modo seguente:

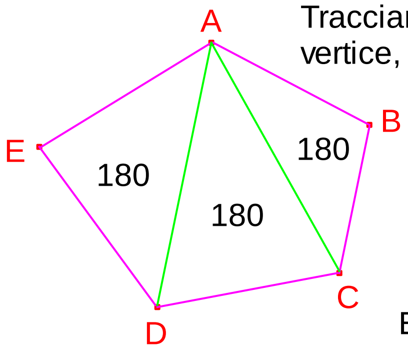
$180\cdot n-360$ = (invece di 360, scriviamo il prodotto $2\cdot 180$)

$180\cdot n-180\cdot 2$ = (applichiamo la proprietà distributiva)

$180\cdot\ n-2$ si arriva a questa forma , che consente il calcolo più rapido e lega in maniera più diretta la somma degli angoli interni al numero dei lati.
Si guadagna qualcosa in un senso, ma si perde il processo che l'ha generata.

Qui è interessante far notare il ruolo determinante della proprietà distributiva che consente di trasformare $180\cdot n-360$ in $180\cdot\ n-2$.

Altra possibile soluzione:



Tracciando le diagonali dallo stesso vertice, si divide il poligono in triangoli

La somma degli angoli dei triangoli, coincide con la somma degli angoli del poligono

E quanti triangoli ci sono ?

Questo dipende dal numero delle diagonali che escono dallo stesso vertice

E quante sono le diagonali che partono da un vertice di un poligono di n lati?

La risposta a queste domande conduce alla formula generale. Un vertice non può essere collegato con se stesso e con i due vertici adiacenti. In tutto dunque sono n-3. I triangoli generati sono uno più del numero delle diagonali, perciò (n-3)+1 = n-2.
Questa dimostrazione può essere affinata giustificando il numero dei triangoli con altre considerazioni: I triangoli sono di due tipi: quelli compresi fra due lati ed una diagonale e quelli compresi fra due diagonali e un lato. La presenza di m diagonali produrrà due triangoli laterali (del primo tipo) e m-1 triangoli centrali (del secondo tipo). In tutto dunque il numero dei triangoli sarà: : (m-1)+2 = m+1 , cioè uno in più del numero delle diagonali, che sono n-3. E sostituendo ad m il numero n-3, si ottiene n-3+1 = n-2 triangoli, ovvero, passando alla somma degli angoli:
$n-2\ \cdot 180°$.

Dunque qui il ragionamento seguito conduce alla forma S.int = $180 \cdot\ n-2$ a meno della proprietà commutativa della moltiplicazione

A pagina 4 sono richieste due definizioni. Senza addentrarsi troppo nei dettagli (che cos'è un lato, che cos'è un angolo) descriviamo le figure in questi termini:

Def: In ogni poligono si chiamano "angoli interni", quelli che hanno per lati due lati consecutivi del poligono.

Def: In ogni poligono, si chiamano " angoli esterni" quelli che hanno per lati, un lato del poligono ed il prolungamento del lato consecutivo.

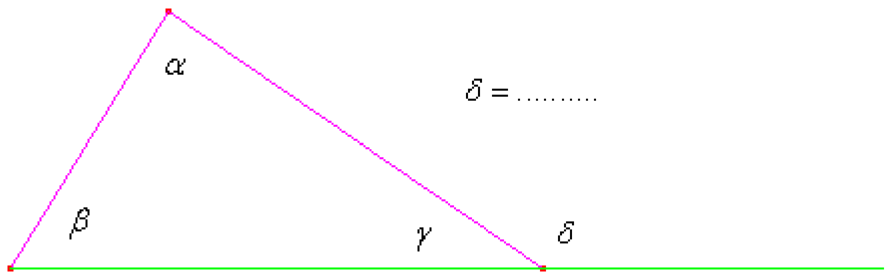
Per quanto riguarda la relazione che intercorre fra l'angolo esterno e l'angolo interno adiacente ad esso, si tratta con evidenza del fatto che, insieme, formano un angolo piatto, la cui ampiezza è di 180° .

Piccola parentesi storica:
Euclide definisce l'angolo rettilineo come "l'inclinazione reciproca di due rette che hanno un estremo in comune e che non giacciono sulla stessa retta". Nella definizione di Euclide è dunque escluso l'angolo piatto.. In effetti non sembra molto naturale chiamare "angolo" una semplice retta….. Euclide concepisce dunque la figura, come "somma di due angoli adiacenti" e di essa dice : "Se due angoli sono adiacenti, la loro somma è sempre uguale alla somma di due angoli retti" e, viceversa: "Se due angoli consecutivi hanno somma pari a quella di due retti, allora essi sono

adiacenti”. Sono le Proposizioni 13 e 14 del Primo Libro degli Elementi. La dimostrazione fornita da Euclide appare quasi incomprensibile per noi moderni, abituati a concepire l’esistenza dell’ “angolo piatto”. Si noti anche che la definizione è tautologica, infatti introduce la parola “inclinazione” per spiegare l’angolo, ma si può spiegare “inclinazione” senza introdurre la parola “angolo” ? Non si può definire tutto sulla base delle sole parole. Prova a fare una ricerca usando solo il dizionario della lingua italiana: ad esempio cerca il significato della parola “tavolo” e continua a cercare il significato delle parole usate per definirlo…(fornire un esempio)

Teorema dell’angolo esterno

Si chiede poi di dimostrare il Teorema dell’angolo esterno. C’è una dimostrazione molto semplice che si basa sul fatto che abbiamo i 180° in due modi diversi:



Da una parte abbiamo la somma degli angoli interni di un triangolo: $\alpha+\beta+\gamma=180°$

Dall’altra abbiamo la somma di due angoli adiacenti: $\delta+\gamma=180°$

Poiché le due somme sono entrambe di 180° esse sono anche uguali fra loro: $\delta+\gamma=\alpha+\beta+\gamma$

e togliendo ad entrambe le somme l’angolo γ, si ottiene $\delta=\alpha+\beta$

Dunque, dal confronto fra le due relazioni segue che δ deve essere uguale ad $\alpha+\beta$, da cui l’enunciato:

In ogni triangolo, l’angolo esterno è sempre uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti

Piccola nota storica:

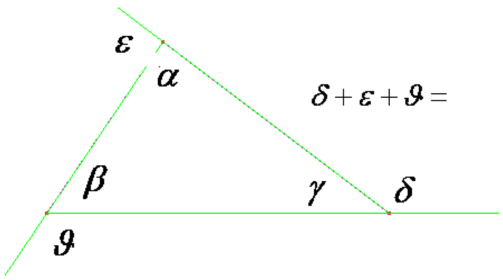
Il teorema dell’angolo esterno compare nella Proposizione 32 del Primo Libro degli Elementi ed è seguito dall’affermazione :”….e la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti” . L’osservazione dalla quale noi siamo partiti, che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° è, per Euclide, la conclusione della Proposizione 32.

Somma degli angoli esterni

A pagina 6, dopo aver chiarito cosa si intende per " somma degli angoli esterni" si chiede quanto vale la somma degli angoli esterni di un triangolo.

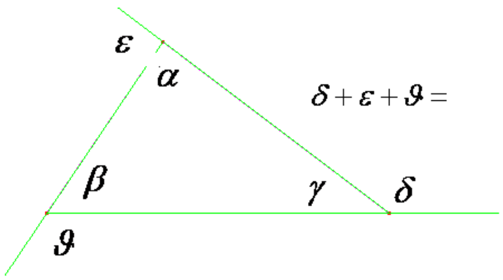
Qui di seguito illustro due soluzioni:

1) Si può pensare al numero degli angoli piatti e togliere la somma degli angoli interni



Ci sono tre angoli piatti $\varepsilon+\alpha$; $\beta+\vartheta$; e $\gamma+\delta$, per un totale di $3 \cdot 180° = 540°$, a cui dobbiamo togliere la somma degli angoli interni, ovvero 180°. Dunque 540°-180° = 360°

2) si può pensare al teorema dell'angolo esterno e sostituire ad ogni angolo esterno la somma dei due interni ed opposti. Si ottiene così la doppia somma degli angoli esterni. Bisogna dunque dividere per 2. (Soluzione di Martina Muru , IC 2013)



La somma degli angoli esterni è $\delta+\varepsilon+\vartheta$. Ma noi sappiamo che, per il teorema dell'angolo esterno, $\delta=\alpha+\beta$; $\varepsilon=\beta+\gamma$; e $\vartheta=\alpha+\gamma$; Allora sostituendo questi valori abbiamo:

$\delta+\varepsilon+\vartheta = \alpha+\beta+\beta+\gamma+\alpha+\gamma$

Cioè: $\delta+\varepsilon+\vartheta = 2\alpha+2\beta+2\gamma$ e , applicando la proprietà distributiva:

$\delta+\varepsilon+\vartheta = 2\cdot \alpha+\beta+\gamma$

Ma noi sappiamo che $\alpha+\beta+\gamma=180°$ perciò, sostituendo avremo:

$\delta+\varepsilon+\vartheta = 2\cdot 180° = 360°$.

La prima soluzione è di carattere generale e si può applicare a poligoni con un numero qualsiasi di lati.

Quale relazione intercorre fra la somma degli angoli esterni e il numero dei lati?
Nessuna.
La somma degli angoli esterni è la stessa per tutti i poligoni, a prescindere dal numero dei lati e dalla forma. (Fanno eccezione i poligoni concavi, ma è un'eccezione interessante, perché scompare come eccezione con un solo piccolo accorgimento.)

Il primo ragionamento fatto per la somma degli angoli esterni di un triangolo ha carattere generale.

Vediamo come si snoda per i poligoni.

Nei quadrilateri avremo quattro angoli piatti, ai quali dovremo togliere la somma degli angoli interni, cioè 360°. Avremo dunque $180° \cdot 4 - 360° = 360°$

Nei pentagoni si avrà $180° \cdot 5 - 540° = 360°$ e così via.
Si capisce che aumenta di 1 il numero degli angoli piatti, ma aumenta di 1 anche il numero degli angoli piatti che vanno a costituire la somma degli angoli interni, perciò la differenza è costante.
Se resistiamo alla tentazione di fare i calcoli, il ragionamento si segue meglio.

E nei triangoli si ha	$180° \cdot 3 - 180° \cdot 1$
Nei quadrilateri si ha	$180° \cdot 4 - 180° \cdot 2$
Nei pentagoni si ha	$180° \cdot 5 - 180° \cdot 3$

La sequenza mostra chiaramente che il risultato è un invariante. Infatti per la sottrazione vale la proprietà invariantiva: Aggiungendo o sottraendo uno stesso numero ad entrambi i termini della sottrazione, la differenza non cambia.
La proprietà è molto utile nei calcoli rapidi. (Vedi schede sul calcolo rapido)

Ma andiamo direttamente alla formula che viene dal ragionamento applicato nel caso generale:

Somma esterni = Numero di angoli piatti – somma degli angoli interni. Che, tradotto in matematica, si scrive:

Somma esterni = $180° \cdot n - \left[180° \cdot \ n - 2\ \right]$ e applicando la proprietà distributiva

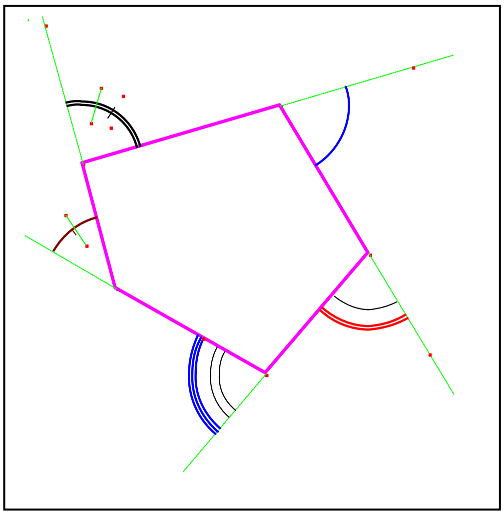
Somma esterni = $180° \cdot n - \ 180° \cdot n - 180° \cdot 2$ e liberando dalle parentesi

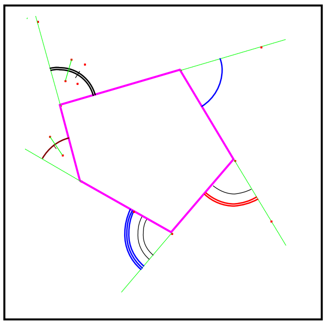
Somma esterni = $180° \cdot n - 180° \cdot n - 180° \cdot 2$ ed eliminando gli opposti

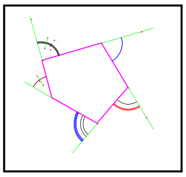
Somma esterni = $180° \cdot 2$

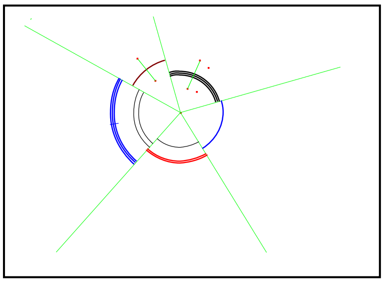
Nell'ultima espressione non compare più il numero dei lati, e questo esprime il valore della somma degli angoli esterni non dipende in nessun modo dal numero dei lati del poligono. Esso è indipendente dal numero dei lati. E' un invariante.

Per “vedere” la somma degli angoli esterni, si può far ricorso ad immagini più suggestive:









Rimpicciolendo il poligono fino a farlo contrarre quasi in un punto, esso lascia scoperti i suoi angoli esterni che lasciano “vedere” la loro somma.

Si può anche provare a far percorrere gli angoli ad una matita, come abbiamo fatto per giustificare la somma degli angoli interni di un triangolo, e scoprire che essa, dopo aver percorso tutti gli angoli esterni è tornata esattamente con l’orientamento iniziale.

Adesso è anche il momento di andare in laboratorio e provare la costruzione dei pavimenti usando Cabri o Geogebra e le trasformazioni geometriche presenti tra le macro:

la simmetria assiale

la simmetria centrale

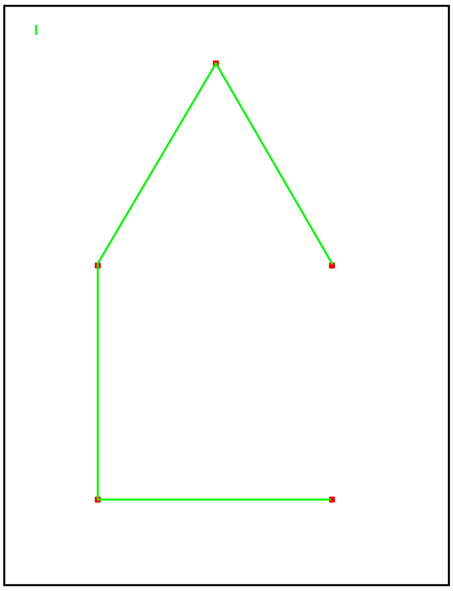
la traslazione

la rotazione

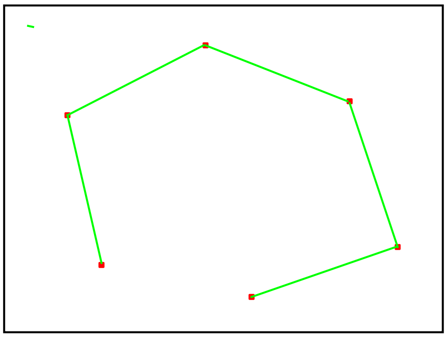
Poligoni regolari

Nel triangolo equilatero l'uguaglianza dei lati trascina con sé immediatamente anche l'uguaglianza degli angoli. E viceversa, se un triangolo ha gli angoli uguali, allora ha anche i lati uguali.
 Nei poligoni con più di tre lati ciò non accade, come si può facilmente mostrare con dei controesempi:

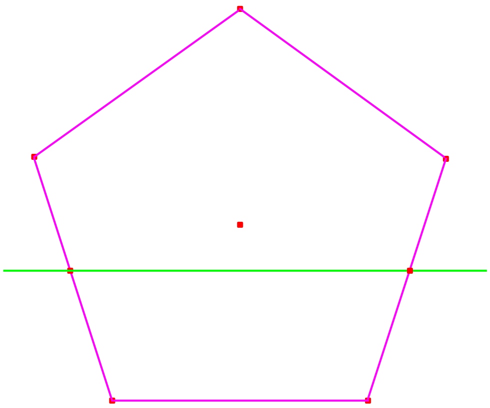
Esempi di poligoni con i lati uguali ma con gli angoli diversi



. Si possono costruire a partire da un segmento dato e tracciando opportuni cerchi. E' interessante provare con Cabri o con Geogebra o un altro software di geometria.



Esempio di poligono con gli angoli uguali e i lati diversi



Per ottenere angoli uguali conviene costruire un poligono regolare e poi tagliarlo con una parallela ad un lato. La parallela crea un nuovo lato e conserva gli angoli.

Dunque se vogliamo davvero che un poligono risponda alla definizione che abbiamo dato, siamo proprio costretti ad elencare entrambe le cose: lati uguali ed angoli uguali.

Si possono immaginare infiniti poligoni regolari: uno per ogni numero di lati, da tre in poi., o almeno crediamo…. Quanto a provare a disegnarli, vedremo che già con 30 lati si fa fatica a distinguerli da una circonferenza. Almeno su dimensioni piccole come quelle di un foglio di carta. Provare a produrre un poligono di 30 lati con un software di geometria.

Per trovare l'ampiezza di un angolo di un poligono regolare si può procedere così:

1) Si divide la somma degli angoli interni per il numero degli angoli (che è lo stesso dei lati)

2) Si divide la somma degli angoli esterni per il numero dei lati, ottenendo così un singolo angolo esterno. Si sottrae poi questo angolo dall'angolo piatto.

Nel primo modo, si ottiene la formula:

Angolo interno = $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$

Nel secondo modo si ottiene la formula:

Angolo interno = $180° - \dfrac{360°}{n}$

E' interessante mostrare ora come si possa passare dall'una all'altra (e viceversa)

$\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$ applicando la proprietà distributiva si ottiene

$\dfrac{180° \cdot n - 180° \cdot 2}{n}$ applicando la definizione di somma di frazioni con ugual denominatore si ottiene

$\dfrac{180° \cdot n}{n} - \dfrac{180°.2}{n}$ e semplificando la prima frazione e moltiplicando nella seconda

$180° - \dfrac{360°}{n}$.

Prova a procedere a ritroso e individuare le proprietà applicate.

L'ultimo è un banale esercizio di calcolo e applicazione della formula. Si ottiene:

Triangolo equilatero 60°	Quadrato 90°
Pentagono regolare108°	Esagono regolare 120°
Ottagono regolare 135°	Decagono regolare 144°

Una piccola curiosità

1) L'angolo aumenta all'aumentare del numero dei lati, ma non proporzionalmente ad essi: se il numero dei lati raddoppia, l'ampiezza dell'angolo aumenta, ma non raddoppia. Se raddoppiasse sempre, avremmo subito angoli maggiori di 360° e con essi sparirebbe il poligono.

2) C'è dunque un limite all'ampiezza dell'angolo interno nei poligono convessi. Esso non può superare 180°

3) $\alpha = 180 \cdot \frac{n-2}{n}$ è un'espressione che assume valori che dipendono da n .

Per n=2 la frazione diventa $\frac{0}{2}$, ossia 0. E per la legge di annullamento del prodotto $\alpha = 0$.

Questo corrisponde al fatto che non ci sono poligoni con 2 soli lati.

Per n=3 si ha $\alpha = 180 \cdot \frac{3-2}{3}$ ovvero $\alpha = 180° \cdot \frac{1}{3}$ e cioè $\alpha = 60°$ e questo corrisponde all'angolo del triangolo equilatero.

E così via calcolando.

4) Dunque, i 180° si modificano secondo il fattore $\frac{n-2}{n}$, variabile al variare di n.

Esso però è una frazione propria perciò rimane comunque minore di 1. Pertanto ha l'effetto di far diminuire il valore di 180°, ma sempre meno.

Per n molto grande la frazione $\frac{n-2}{n}$ si avvicina sempre di più ad uno e per n che continua ad aumentare non si riuscirà più a distinguerla da 1.

In situazioni simili si dice che , per n che tende ad infinito la frazione ha limite 1 e di fatto si assume per essa il valore 1.

Si scrive: $\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{n-2}{n} = 1}$

5) Il valore dell'angolo si avvicina a 180°

6) Si osserva che già un poligono di 30 lati è indistinguibile da una circonferenza. Questo dovrebbe far riflettere sulla nostra capacità di "vedere" angoli e sull'importanza che ci sia la matematica a garantire della loro esistenza. Dovrebbe inoltre far riflettere sul fatto che questo avvicinamento infinito ai 180° implica che, per quanto vicino io sia, l'intervallo rimasto si può ancora dividere infinite volte. Tutto questo sfugge alla nostra mente e non possiamo far altro che fidarci della matematica e di ciò che essa ci suggerisce.

7) All’ultima domanda si può rispondere in 2 modi:

a) risolvendo un’equazione:

$\frac{180\cdot(n-2)}{n}=179$ da cui, moltiplicando entrambi i membri per n

$180\cdot(n-2)=179\cdot n$ e, applicando la proprietà distributiva al primo membro

$180\cdot n-180\cdot 2=179\cdot n$ ora sottraendo $179\cdot n$ ad entrambi i membri

$180\cdot n-180\cdot 2-179\cdot n=0$ e aggiungendo $180\cdot 2$ ad entrambi i membri

$180\cdot n-179\cdot n=180\cdot 2$ e, applicando di nuovo la proprietà distributiva al primo membro

$n\cdot(180-179)=360$ infine, calcolando dentro parentesi

$n=360$ lati

b) Si può invece passare per la somma degli angoli esterni. Sappiamo che essa è 360° e che gli angoli esterni sono tutti uguali fra loro. Possiamo determinare l’ampiezza di un angolo esterno con una banale sottrazione:
Un angolo esterno = 180-179 = 1° grado
Ora dividiamo i 360° per 1° e otteniamo il numero dei lati cioè, 360 lati.

Riempimenti regolari del piano.
(Tassellazioni o pavimentazioni di un piano infinito)

La legge che governa il riempimento del piano è che la somma degli angoli che convergono in un vertice sia esattamente di 360°.
I poligoni regolari che consentono il riempimento del piano sono solo tre: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.
Infatti, con 6 triangoli equilateri, con il vertice in comune, si completano i 360°
Lo stesso avviene con 4 quadrati e con 3 esagoni.
La legge cui deve obbedire l'angolo di un poligono regolare è che sia sottomultiplo di 360°, cosicché un numero intero di tali angoli possa completare i 360° necessari a pavimentare.

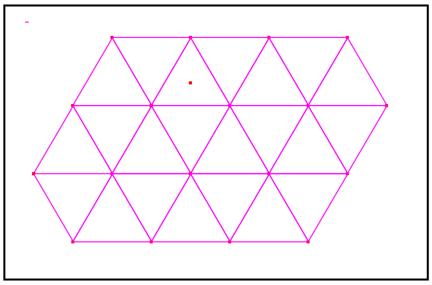
E potremmo chiudere qui la questione: Le pavimentazioni regolari sono solo 3.

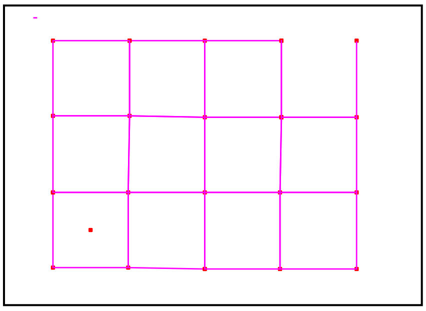
Tuttavia controlliamo con i poligoni che seguono:
Non è possibile con 3 pentagoni, poiché la somma dei 3 angoli arriva a 324° e non c'è posto per un quarto pentagono.
L'ettagono non fa testo poiché con 128,58° non si arriva certo a fare i 360° richiesti. E poi basta calcolare, e i calcoli ci dicono che due sono pochi e tre sono troppi
Con 2 ottagoni invece si arriva a 270° e ne mancano 90° per arrivare a 360°, perciò un altro ottagono non ci sta: si arriverebbe a 405°, il che non è possibile.

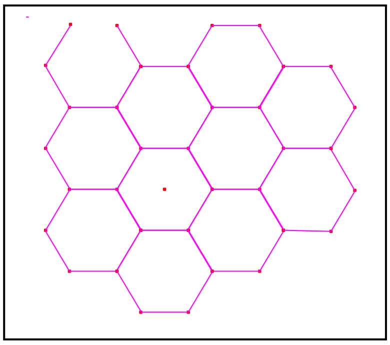
Con poligoni di più lati non facciamo che peggiorare la cosa, perciò la questione è proprio chiusa qui.

Possiamo ora enunciare il **Teorema: Esistono solo 3 tipi di pavimentazioni regolari**
E questo lo abbiamo appena dimostrato.

Quanto all'effettiva costruibilità , eccone la prova.







I disegni sono stati realizzati costruendo un solo poligono regolare ed applicando la funzione simmetria assiale. Si può invitare gli alunni a produrre schermate regolari utilizzando le altre trasformazioni geometriche o componendo alcune di esse.
E' interessante introdurle in questo modo, perché usarle e vederne gli effetti aiuta poi molto ad inquadrarle teoricamente e ad analizzare la costruzione di ognuna di esse.

Riempimenti semiregolari del piano

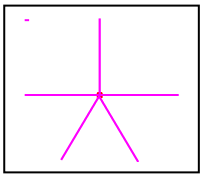
E' interessante esplorare anche quest'argomento perché introduce ad una comprensione più completa di tanti capolavori dell'Arte come ad esempio i fantasiosi pavimenti di tante nostre chiese e monumenti. Inoltre è caratteristico della curiosità e della ricerca affrontare i problemi che si presentano senza averne timore. Probabilmente, vedere che i pentagoni lasciavano aperto uno spazio di forma triangolare nei pavimenti avrà stimolato al curiosità di molti. Probabilmente, vedere che le pavimentazioni regolari sono solo 3, avrà fatto pensare alla possibilità di ottenere altri pavimenti mescolando i poligoni regolari. Iniziamo dunque, e rispondiamo alle domande poste.

Con due tipi di poligono: iniziamo con i più semplici: il triangolo ed il quadrato.

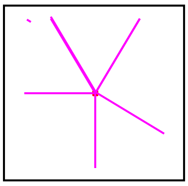
Proviamo con un solo quadrato.
360°, meno i 90° di un solo quadrato, lasciano scoperti 270°. Non si riesce a coprirli con multipli di 60°, cioè con triangoli equilateri. Non funziona.
Proviamo con 2 quadrati
360° - 90°-90° = 180° .   180° equivalgono a 3 triangoli equilateri.

Allora abbiamo trovato una combinazione possibile: 3 triangoli e 2 quadrati si possono accostare intorno ad un vertice. Indichiamo questa scoperta con V (3,3,3,4,4) che significa che attorno ad un vertice ci sono 3 triangoli equilateri e 2 quadrati.

Ma si trovano due possibili vertici :

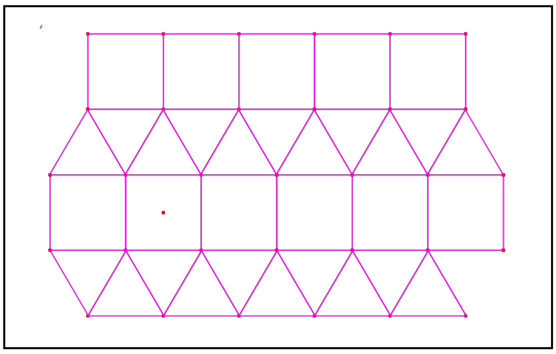


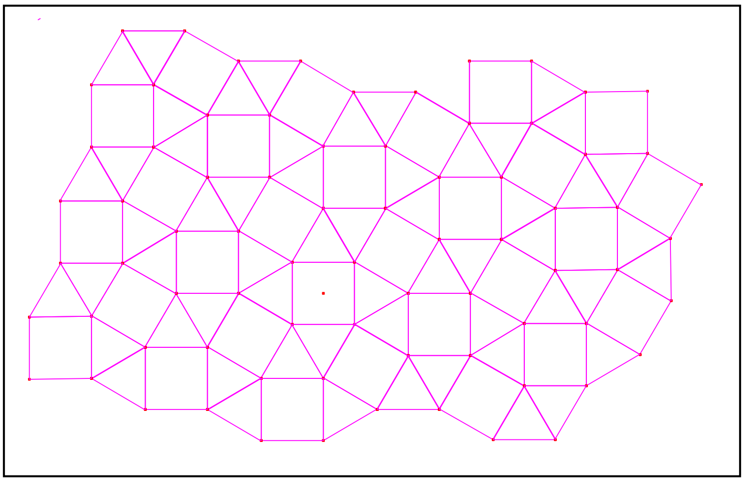
V (3,3,3,4,4)



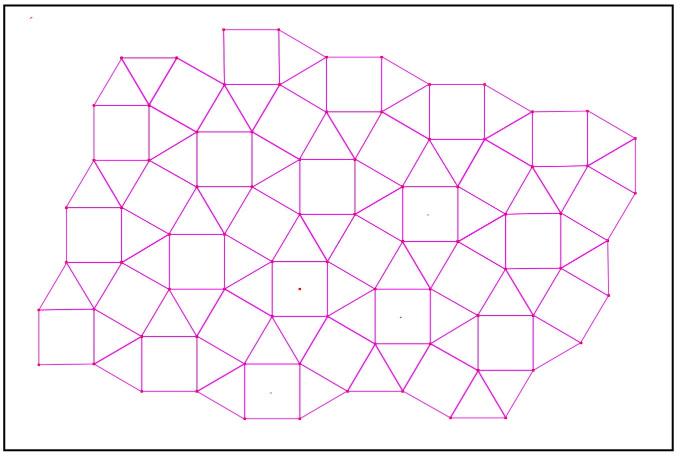
V (4,3,4,3,3)

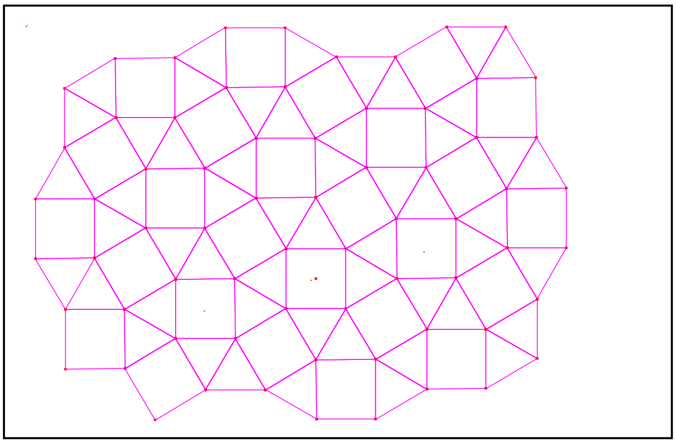
Dunque due possibili composizioni.
Rimane da vedere se esse sono effettivamente ripetibili, in modo che tutti i vertici del piano abbiano la stessa composizione



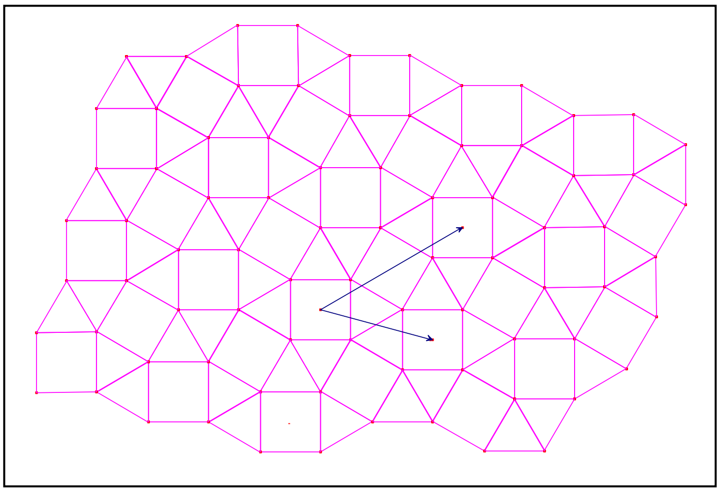


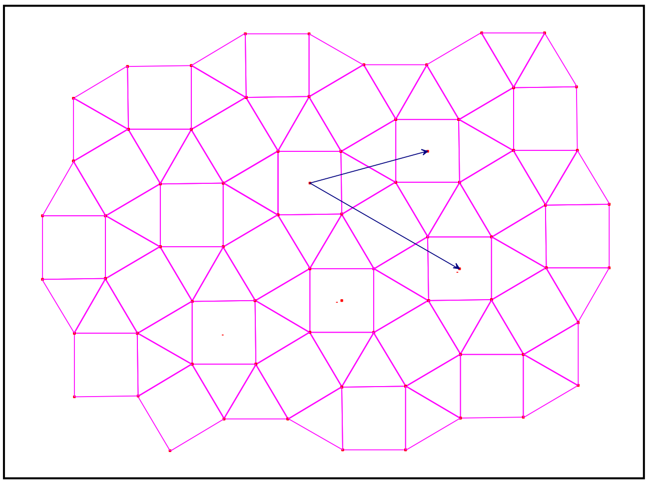
Si generano giochi di simmetrie che mostrano motivi diversi a seconda di come li guardiamo. In realtà, i vertici del secondo tipo sono 2, orientati in maniera diversa. I pavimenti che ne risultano sono diversi solo ad un occhio attento.





I disegni qui sopra presentano un effetto ottico diverso, speculare.
Essi differiscono solo per un piccolo particolare: l'orientamento dei poligoni intorno ad un vertice.
Nel primo disegno, in senso antiorario si ha un vertice V (4,3,4,3,3)
Nel secondo disegno, in senso antiorario si ha invece V (4,3,3,4,3,)
Nel primo disegno si individua una traslazione "corta" (di un vettore pari alla distanza dei centri di due quadrati vicini ma con i lati paralleli) da sinistra a destra verso il basso
Nel secondo disegno si individua una traslazione "corta" (di un vettore pari alla distanza dei centri di due quadrati vicini ma con i lati paralleli) da sinistra a destra verso l'alto





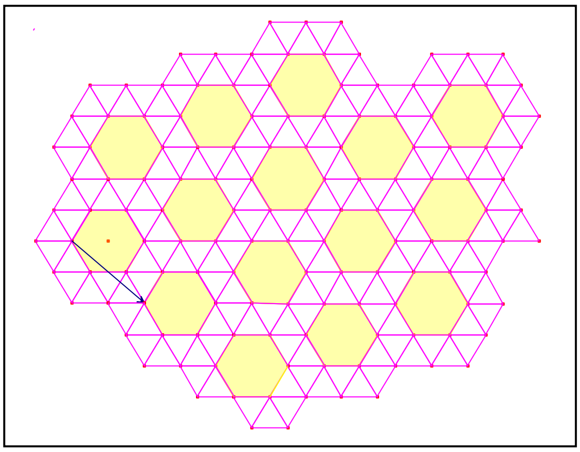
Sono presenti anche altre traslazioni. Ci si può divertire ad individuarle. Si può anche chiedere agli studenti di provare, a partire da un modulo base, a completare la pavimentazione usando le traslazioni.
I disegni qui sopra sono stati ottenuti solo con rotazioni di 120° intorno ad opportuni vertici, a partire da un quadrato costruito con la funzione "poligono regolare", sormontato da un triangolo equilatero costruito tracciando cerchi, secondo la proposizione I,1 di Euclide: "Su una retta terminata data (un segmento) costruire un triangolo equilatero:

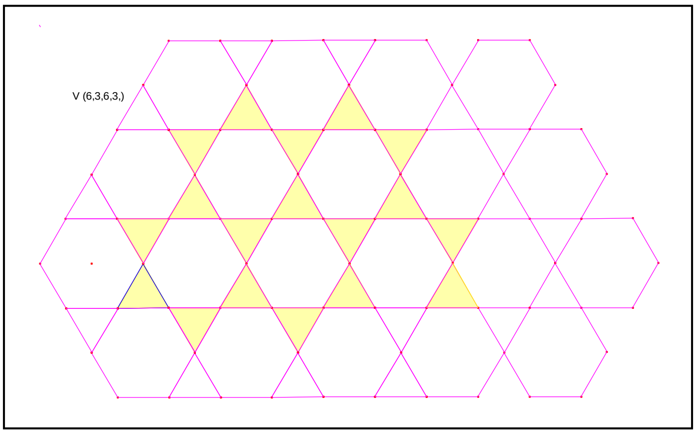
Con triangoli ed esagoni abbiamo diverse possibilità di accostare i due poligoni

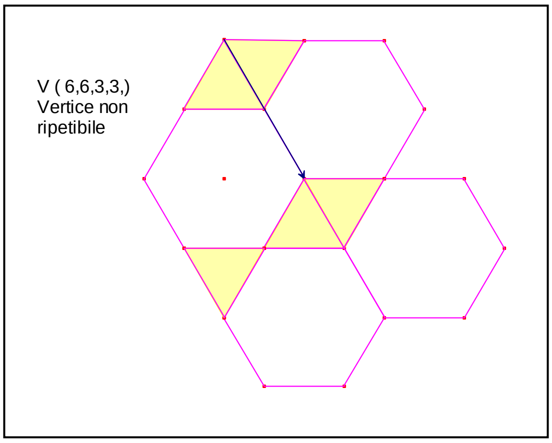
Con un esagono e 4 triangoli equilateri la somma degli angoli è 360° e si ha il vertice (6,3,3,3,3)
Con due esagoni e due triangoli equilateri si hanno i vertici : V(6,3,6,3) e V(6,6,3,3)

V(6,3,3,3,3)

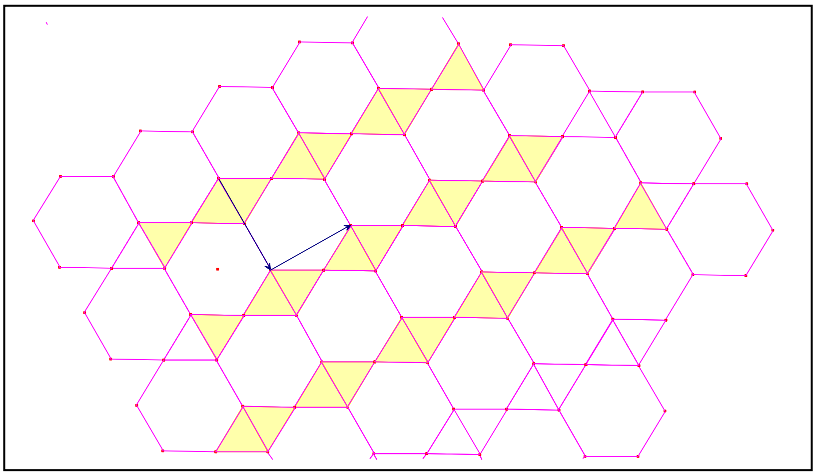
V(6,3,6,3)







Mentre il vertice V(6,6,3,3) si rivela non ripetibile. Dopo un primo passo siamo subito costretti ad un altro tipo di vertice, (6,3,6,3) e veniamo così a violare la regola di fare tutto con un solo tipo di vertice



Naturalmente questo può forse far venire voglia di vedere cosa succede mescolando i vertici….
E’ chiaro che si apre un campo dove domina la fantasia e che può comunque essere esplorato alla ricerca delle simmetrie. Il disegno è stato realizzato effettuando simmetrie assiali e centrali e poi solo traslazioni di vettore i 2 indicati.

Calcolo degli angoli nei poligoni regolari

N° lati	Ampiezza angolo	N° lati	Ampiezza angolo	N° lati	Ampiezza angolo
3	60	17	158,8	32	168,75
4	90	18	160	36	170
5	108	19	161,05	40	171
6	120	20	162	36	170
7	128,58	21	162,86	40	171
8	135	22	163,6	42	171,42
9	140	23	164,3	45	172
10	144	24	165	60	174
11	147,27	25	165,6	72	175
12	150	26	166,15	90	176
13	152,30	27	166,66	120	177
14	154,28	28	167,14	180	178
15	156	29	167,6	360	179
16	157,5	30	168	3600	179,9

A questo punto il discorso si fa più complesso. Riuscire a completare il quadro dei possibili vertici usando la tabella degli angoli è complicato e lungo. Lasciamo che lo faccia chi vuole prenderlo come un gioco e vuole divertirsi a trovare tutte le composizioni possibili.

N°	Tipo di vertice	Ripetibile	N°	Tipo di vertice	Ripetibile
1	3,3,3,3,3,3	Si	12	3,8,24	NO
2	3,3,3,3,6	Si	13	3,9,18	NO
3	3,3,3,4,4	Si	14	3,10,15	NO
4	3,3,4,3,4	Si	15	3,12,12	Si
5	3,3,4,12	NO	16	4,4,4,4	Si
6	3,4,3,12	NO	17	4,5,20	NO
7	3,3,6,6	NO	18	4,6,12	Si
8	3,6,3,6,	Si	19	4,8,8	Si
9	3,4,4,6	NO	20	5,5,10	NO
10	3,4,6,4	Si	21	6,6,6	Si
11	3,7,42	NO			

Ad ogni buon conto le altre possibilità sono indicate nella tabella allegata
Come si vede dalla tabella i tipi di vertice possibili sono solo 21:

3 con poligoni regolari di un solo tipo come già sappiamo

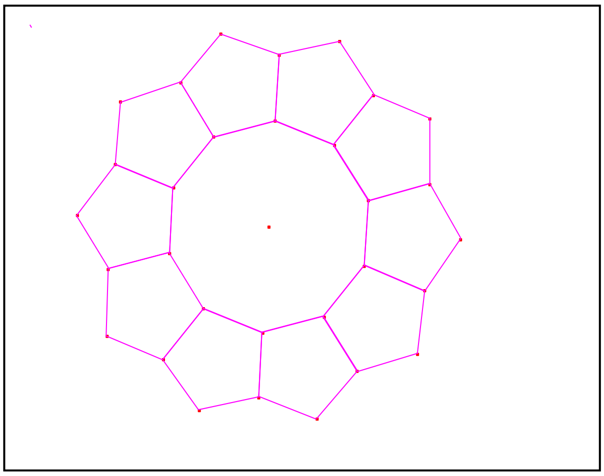
8 con poligoni regolari di 2 tipi di cui 6 ripetibili

10 con poligoni regolari di 3 tipi di cui solo 2 ripetibili

Dimostrare che con 4 poligoni regolari è impossibile avere un vertice utile è abbastanza semplice: Poiché i poligoni debbono essere diversi, conviene prendere quelli di un minor numero di lati. Allora siamo costretti a prendere almeno un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono ed un esagono, per un totale di angoli di 60+90+108+120= 378°, superiore al limite consentito, perciò:

Teorema: Non è possibile alcuna pavimentazione semiregolare con più di 3 diversi tipi di poligono regolare.

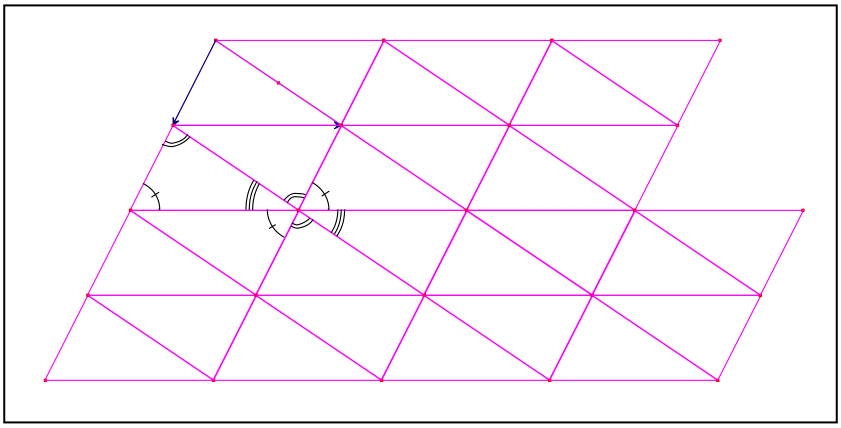
Quanto alla ripetibilità dei vertici, possiamo osservare quanto segue



Nella figura è rappresentata la coppia decagono e pentagono, che formano un vertice V(5,5,10).
Essi rispettano la legge che la somma degli angoli che convergono in ogni vertice sia di 360°, tuttavia non si riesce a continuare la pavimentazione perché ora dovremmo aggiungere decagoni dappertutto, per rispettare il vertice stabilito, ma così avremmo subito due decagoni con un lato in comune ed un nuovo tipo di vertice V(10,10,5). La legge non è sufficiente a garantire l'effettiva costruibilità del pavimento. Si dice che essa è condizione necessaria, ma non sufficiente per la costruibilità.

Riempimenti del piano con poligoni non regolari

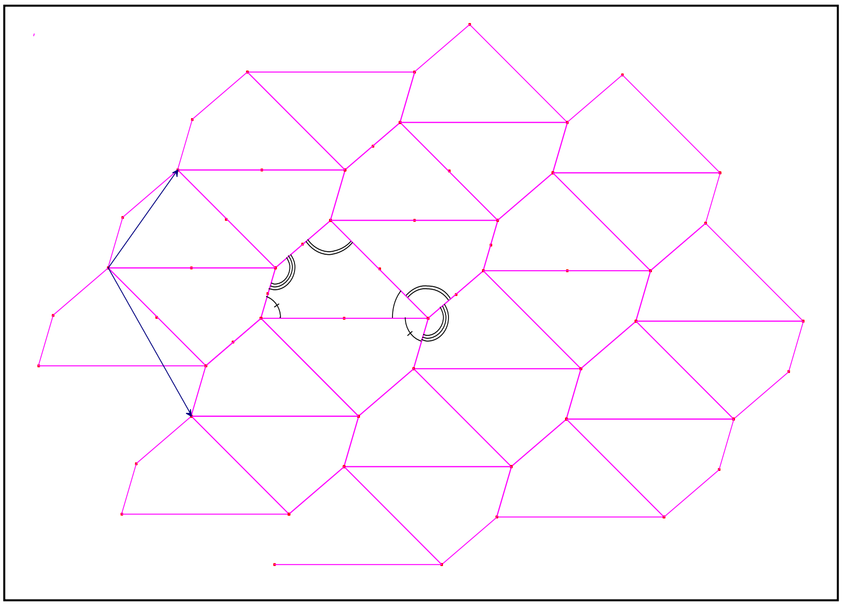
Si tratta ovviamente di poligoni tutti dello stesso tipo.
E' possibile con triangoli tutti uguali fra loro? La risposta, abbastanza controintuitiva è SI.
L'esperimento con i poligoni di cartoncino avrà portato certamente a concludere così.



La figura è stata realizzata con una simmetria centrale all'inizio e poi con traslazioni dei due vettori indicati

Come mai funziona? Beh, perché in uno stesso vertice ci sono tutti e tre gli angoli del triangolo di partenza 180° gradi dunque, presi due volte

Lo stesso accade con i quadrilateri



La somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°.
Ogni vertice può essere formato dai quattro angoli del quadrilatero iniziale.
La figura si può ottenere con una simmetria centrale rispetto al punto medio di ogni lato.
Oppure, dopo un prima simmetria centrale, si può procedere con traslazioni di vettore i vettori indicati

I pavimenti delle nostre case sono fatti per lo più con mattonelle quadrate, forse costruite nella segreta speranza che le dimensioni interne delle nostre stanze siano state progettate per contenerne un numero esatto, in modo da non doverne tagliare per arrivare alle pareti. In realtà ciò non accade. La forma quadrata è la preferita per la grande simmetria che offre. E' la simmetria che consente di accostare mattonelle quadrate senza doversi soffermare a pensare se sia meglio ruotarle in un senso o nell'altro. Chi ha sperimentato con i cartoncini a forma di triangolo o di quadrilatero qualunque, conosce bene tale difficoltà e sa quanto tempo occorre per accostare i quadrilateri nella maniera corretta.