INCONTRI OLIMPICI - MONTECATINI

ALGEBRA

Titolo nota 15/10/2017

Viète $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

deg = 4 $\binom{4}{2}$ $ab+ac+ad+bc+bd+cd$

ES: un polinomio monico di grado 3 si annulla in 1 e 2, il termine di grado 1 è 5. Quanto vale la terza radice? (esiste una terza radice?)

$$p(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(x-2)\underbrace{r(x)}_{x-b}$$

$$1\cdot 2 + 1\cdot c + 2\cdot c = \boxed{5} \quad c=1$$

Possiamo giocare col parametro 5 in modo da avere una terza radice davvero distinta ($c\neq 0$, $c\neq 3$ per evitare che provino a caso)

ES: un polinomio di grado 3 si annulla in 1 e 2, il coeff. del termine di grado 2 è il doppio di quello di grado 1.

$$\cancel{k}(ab+bc+ca) = -(2(a+b+c))\cancel{k}$$

Trovare la terza radice...

ES: un polinomio di grado 3 si annulla in 1 e in una radice doppia c (+ condizione di prima), trovare c.

$a=1,\ b=c \leadsto c+c^2+c = -2(1+2c)$

equaz. di secondo grado...

ES: un polinomio monico di grado 3 è tale che
$p(1) = p(2) = 5$. Il termine di grado 1 è 17
Esiste un terzo numero tale che $p(c) = 5$?
Sol: $q(x) = p(x) - 5$, poi ripeti il ragionamento di prima

ES. polin. monico, di grado 3, tale che $p(1) = 5$ $p(2) = 6$
Il termine di grado 1 è 17
→ Trovare ~~il terzo numero tale che $p(c) = c+4$~~ Quanto fa $p(-1)$?

Sol: $q(x) = p(x) - x - 4$ $\quad q(x) = (x-1)(x-2)(x-c)$
termine di grado 1 di $q(x)$ è 16.
$16 = 1 \cdot c + 2 \cdot c + 1 \cdot 2$ equazione di primo grado
$q(c) = p(c) - c - 4 = 0$

Viète + disuguaglianze:
Un polinomio monico di grado 3 con tre radici reali positive ha il termine di grado 2 pari a -18.
Quanto vale al minimo il termine noto?

$$\frac{\overset{\boxed{-\text{termine di grado } 2}}{\overset{\|}{\boxed{a+b+c}}}}{3} \geq \sqrt[3]{\underset{\underset{\boxed{-\text{termine noto}}}{\uparrow}}{\boxed{abc}}} \qquad a,b,c \geq 0$$

$$\begin{cases} S = a+b+c \\ Q = ab+bc+ca \\ P = abc \end{cases}$$
funzioni simmetriche elementari ($\Leftrightarrow$ coefficienti del polinomio che ha radici a, b, c)

Ogni polinomio simmetrico in a, b, c si scrive come funzione (polinomiale) di S, Q, P

Es. $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

no $a^3+b^3+c^3 = \dots (a+b+c)^3 - $ (termini contenenti a^2b e simmetrici, termini contenenti abc)

$a^4+b^4+c^4 = \dots$

Siano $-S, Q, -P$ i coefficienti del polinomio monico che ha radici a, b, c. Trovare i coefficienti del polinomio che ha radici a^2, b^2, c^2

Sol: sono
$$-(a^2+b^2+c^2) = -(S^2-2Q)$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 =$$
$$-a^2b^2c^2 = -P^2$$

$$a^3+b^3+c^3 - (\overset{S}{a+b+c})^3 = -3(a^2b+ab^2+bc^2+cb^2+ac^2+ca^2) - 6\overset{P}{abc}$$

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) = \dots \quad \dots \quad \dots$$

27 termini 3 sono a^3, b^3, c^3

$$a^3+b^3+c^3 = S^3-6P-3(a^2b+ab^2+\dots) = S^3-6P-3(QS-3P)$$

$$(\underbrace{ab+bc+ca}_{Q})(\underbrace{a+b+c}_{S}) = (a^2b+b^2a+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2) + 3\underbrace{abc}_{P}$$

Siano a, b, c le tre radici del polinomio x^3-2x^2+5x-7, trovare i coeff. del polinomio che ha per radici a^2, b^2, c^2

Se lo diamo con un polinomio che ha per radici $1, 2, 3$, lo studente

(controllare che abbia tre radici reali distinte)

Furbo se ne accorge e fa una soluzione diversa da quella che avevamo in mente noi...

Siano a, b, c le tre radici del polinomio x^3-2x^2+5x-7, trovare il valore di $(a-1)^5(b-1)^5(c-1)^5$

Sembra un lavoraccio... espando in funzione delle s, p, q, ...

$$(a-1)(b-1)(c-1) = -\underbrace{p(1)}_{\substack{\| \\ (1-a)(1-b)(1-c)}}$$

ES: Trovare le sol. intere di $x^3+y^3=91$

Febbraio ~2000

$$(x+y)(\underbrace{x^2-xy+y^2}) = 91 = 7\cdot 13$$

$\Downarrow$

scrivere questo come funzione di $(x+y)$ e xy

Polinomi in una variabile / divisibilità

Per quali (quanti) valori interi x il numero $\frac{180}{x}$ è intero?

(Divisori di 180)

Per quali valori interi x $\frac{180}{x-5}$ è intero?

(divisori di 180 +5)

Per quali interi x è intero $\frac{x+180}{x-5} = \frac{x-5+185}{x-5} =$

$= 1 + \underbrace{\frac{185}{x-5}}$ (divisione con resto $x-180 : x-5$)

sol: (divisori di 185) + 5

Per quali interi x è intero $\frac{x^3 - x^2 + x - 180}{x-5}$?

Stesso lavoro — divisione tra polinomi ...

(Teo. Ruffini: resto sarà il numeratore valutato in $x=5$)

$$\frac{(6-x)^{2017}}{x-5}$$

Se il denominatore non è monico, è più complicato

Se avessi $\frac{x+180}{3x-5}$?

Soluzione di algebra: disuguaglianze! Se x è abbastanza grande, $x+180 < x-5$ $\quad 185 < 2x$

$x > 92.5$

e quindi non può essere intero (a meno che non sia 0)

Prendo $x = -z$, $\quad \frac{180-z}{-3z-5} \quad \frac{-2}{-5}$

No soluzioni se DEN $\leq$ NUM (e tutti e due negativi)

Lezione di TDN: $\frac{x+180}{3x-5}$ $\quad$ $3x-5$ non è un multiplo di 3

Quindi $\boxed{\frac{x+180}{3x-5}}$ intero $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\frac{3(x+180)}{3x-5}} = \frac{3x-5+3\cdot180+5}{3x-5} =$

$= 1 + \frac{545}{3x-5}$

$3x-5 \mid x+180$ $\qquad$ $3x-5 \mid 3(x+180)$

ma $3x-5$ non è multiplo di 3, quindi i suoi fattori "stanno" in $x+180$

Altra idea: i divisori vengono a coppie d $\frac{n}{d}$

Divisori di 256

$$\underbrace{1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 8}_{<\sqrt{256}} \;\; \underbrace{16}_{=\sqrt{256}} \;\; \underbrace{32 \;\; 64 \;\; 128 \;\; 256}_{>\sqrt{256}}$$

Per quali valori interi positivi di x il numero

$$\frac{256}{x+16} \text{ è intero?}$$

$x+16$ può valere solo un divisore >16, sono la metà..

---

polinomi palindromi:

$$5x^5+7x^4+15x^3+15x^2+7x+5$$

1. Se a,b,c sono radici del polinomio $x^3+5x^2+7x+15$, qual è il polinomio con radici $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$

R: $15x^3+7x^2+5x+1$

2. Dimostrare che se x è una soluzione di $p(x)=0$, allora $\frac{1}{x}$ è una sol. di $(\text{rev}\, p)(x)=0$

"p con coefficienti scambiati"

3. $p\left(\frac{1}{x}\right) = (\text{rev}\, p)(x)\frac{1}{x^d}$

ES: $p=x^3+5x^2+7x+15$ $\quad p\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^3}+5\frac{1}{x^2}+7\frac{1}{x}+15=$

$$=\frac{1}{x^3}\left(1+5x+7x^2+15x^3\right)=(\text{rev}\, p)(x)$$

4. Dimostrare che se p è palindromo ($p = \text{rev}\, p$), $\cdot \frac{1}{x^d}$

allora le radici vengono a "coppie" $\frac{1}{a}, a$

$x + \frac{1}{x}$

Equazioni "cicliche": es.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ z + x = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 3 \\ z^2 + x^2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} S - z^2 = 2 \\ S - x^2 = 3 \\ S - y^2 = 8 \\ S = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \qquad S = x^2 + y^2 + z^2$$

$$2S = 13$$

ES: Trovare soluzioni di:

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \frac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \frac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$$

$\frac{1}{x} := a \qquad \frac{1}{y} := b \qquad \frac{1}{z} := c$

(+ discuti $x = 0$)

$$\begin{cases} \frac{1+a^2}{2} = b \\ \frac{1+b^2}{2} = c \\ \frac{1+c^2}{2} = a \end{cases} \qquad f(f(f(a))) = a \qquad f(t) = \frac{1+t^2}{2}$$

C'è una soluzione, tutte e tre le variabili uguali $a = b = c = 1$

Non ce ne sono altre perché $f(t) = \frac{1+t^2}{2}$ è "più lontano" da 1 di t