LE EQUAZIONI FUNZIONALI: alcune semplici strategie risolutive

MARZIA TOSO
Liceo delle Scienze Applicate – ISIS Malignani di Udine
Mathesis - Sezione di Udine

INCONTRI OLIMPICI
Montecatini Terme, 15 ottobre 2017

Questa breve dispensa propone esempi tratti da gare nazionali ed internazionali sulle equazioni funzionali e si propone di presentare e illustrare alcune delle tecniche di base che portano a determinare le soluzioni di queste particolari equazioni.

Questo argomento, infatti, compare nelle gare individuali internazionali ma anche nelle gare a squadre, sia locali che nazionali e non sempre gli studenti sono in grado di trovare una strategia risolutiva. È fondamentale far capire loro che non sono necessari prerequisiti particolari ma che basta un po' di ingegno e qualche semplice "trucco" algebrico.

1 Cenni sulle equazioni funzionali

È data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Possiamo considerare un'equazione del tipo

$$f(x)f(y) = xy \tag{1}$$

con x, y nel dominio di f. Un'equazione come la (1), che esprime una relazione tra i valori di una funzione in due o più punti, si chiama *equazione funzionale*:

Un'equazione funzionale è un'equazione le cui incognite sono funzioni.

Molti problemi matematici possono ridursi alla soluzione di equazioni funzionali, e in questo caso ogni funzione che soddisfi l'equazione funzionale è una soluzione della stessa. Di solito un'equazione di questo genere ha molte soluzioni diverse: come trovarle? Cerchiamo di dedurre dalla (1) tutte le informazioni possibili, senza porre restrizioni su f. L'unica cosa da fare è provare a fare manipolazioni algebriche e sostituzioni a partire dalle informazioni disponibili per arrivare a esplicitare la $f(x)$.

2 Metodi di base per la risoluzione di equazioni funzionali

Per risolvere equazioni funzionali, potrebbe essere utile ricordare alcune strategie elementari:

1. **Controllare se funzioni** particolarmente semplici, come le **costanti o** le funzioni **lineari**, **verificano l'equazione**;

2. **Si cercano sostituzioni che annullino una particolare espressione** che compare all'interno dell'equazione o che la rendano uguale ad un valore "comodo". Ad esempio:

   - possiamo **sostituire alle variabili** x e/o y **qualche numero** specifico (generalmente partendo da 0,1..);
   - nel caso ci siano due variabili, possiamo **porre** $y = x$;
   - se per esempio nell'equazione compare $f(x + y)$ e conosciamo il valore esatto di $f(0)$, possiamo sostituire y con $-x$ e viceversa.

3. **Esprimere una certa quantità in modi diversi**; per esempio se l'esercizio ci fornisce $f(x+y)$ in funzione di $f(x)$ e $f(y)$ si potrebbe tentare di scrivere $f(2)$ come $f(1 + 1)$ oppure $f(4)$ come $f(1 + 3)$ o $f(2 + 2)$;

4. **Operare dei cambi di variabile**, come, ad esempio, sostituire $x + 1$ con z e riscrivere l'equazione in funzione di z. Sostituendo le variabili, bisogna tenere conto dei valori di x per cui l'equazione non perde di significato (se ad esempio sostituiamo x^2 con x, otteniamo un'equazione valida solo per i valori positivi della x);

5. **Dare un nome alle** quantità **costanti** che compaiono;

6. **Riconoscere e sfruttare iniettività e suriettività** nelle equazioni considerate;

7. **Generalizzare attraverso l'induzione le formule trovate**: questo metodo si basa sull'utilizzo del valore iniziale $f(1)$ per trovare prima $f(n)$ per n

intero e successivamente $f\left(\frac{1}{n}\right)$ e $f(r)$ con r razionale; esso viene utilizzato nei problemi in cui la funzione è definita in $\mathbb{Q}$;

8. **Ricondursi**, per quanto possibile, a particolari equazioni in due variabili dette **Equazioni di Cauchy**, che si presentano nella forma:

   - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
   - $f(xy) = f(x) + f(y) \quad$ per $x, y > 0, \quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
   - $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
   - $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

   Osserviamo che la prima equazione preserva l'addizione, l'ultima la moltiplicazione mentre la seconda e la terza cambiano le somme in prodotti.

Qui di seguito vengono illustrati alcuni esempi:

Esempio 1 Proviamo a risolvere la (1) seguendo i suggerimenti:

sostituiamo x e y in modo opportuno, ponendo $y = x$ e $f(x) = cx$ con c costante reale, si ottiene

$$[f(x)]^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c^2x^2 = x^2$$

dalla quale si ricava che $c = \pm 1$.

Pertanto le soluzioni che cerchiamo potrebbero essere rappresentate dalla famiglia di funzioni $f(x) = cx$ con $c = \pm 1$, ovvero $f(x) = \pm x$.

Verifichiamo tali soluzioni, sostituendole nell'equazione iniziale:

$$cxcy = xy \; \forall x, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow c^2xy = xy; \; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

uguaglianza vera se:

$$c^2 = 1$$

ovvero se $c = -1 \vee c = 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Quindi le uniche soluzioni ammissibili sono $f(x) = \pm x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2 Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, risolvere l'equazione funzionale

$$f(xy) = (f(x) - 1)\, f(y) - x^2 + 1.$$

Soluzione Si può cominciare cercando di sostituire, per tentativi, qualche numero specifico alla x o alla y. Proviamo ad esempio sostituendo $x = 0$ (così si annullano diversi termini). Si ottiene

$$
\begin{gathered}
f(0) = (f(0) - 1)\, f(y) + 1 \\
\Downarrow \\
(f(0) - 1) = (f(0) - 1) \cdot f(y) \\
\Downarrow \\
(f(0) - 1)\,(f(y) - 1) = 0
\end{gathered}
$$

Dall'ultima relazione sopra scritta, si ricavano le due condizioni:

$$(f(0) - 1) = 0 \text{ oppure } (1 - f(y)) = 0.$$

La seconda condizione equivale a

$$f(y) = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

quindi la funzione cercata sarebbe una funzione costante e uguale a 1. È possibile? **È sempre necessario fare la verifica**, cioè sostituire nell'equazione iniziale le soluzioni determinate e vedere se verificano l'identità. Verifico:

$$1 = (1 - 1) + 1 - x^2 + 1.$$

Semplificando si ottiene infatti:

$$x^2 = 0,$$

Non avendo ottenuto un'identità (questa equazione è verificata solo per $x = 0$,) quindi la soluzione $f(x) = 1$ non è accettabile. Consideriamo la seconda condizione, cioè $f(0) = 1$, e proviamo a fare una sostituzione opportuna (di nuovo cerco una sostituzione che annulli qualche termine nell'equazione). Proviamo a sostituire $y = 0$ e ottengo

$$f(0) = (f(x) - 1)\, f(0) - x^2 + 1$$

e sostituendo $f(0) = 1$ si ottiene

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Potrebbe essere la soluzione corretta? Verifichiamo sostituendo nell'equazione iniziale: si ottiene

$$x^2y^2 + 1 = (x^2) - x^2 + 1$$

$$x^2y^2 + 1 = x^2y^2 + 1$$

che è un'identità e quindi la funzione $f(x) = x^2+1$ rappresenta la soluzione cercata.

Esempio 3 Si determini l'equazione della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **suriettiva** tale che

$$f\left(x - f(y)\right) = 2f(x) + x + f(y).$$

Soluzione Vediamo come la condizione di suriettività permetta di trovare subito la soluzione. Infatti, in questo caso non conviene sostituire un numero specifico alla x o alla y, ma sostituirlo direttamente a $f(y)$ (considerato che $f(y)$ può assumere un qualunque valore reale). Ponendo $f(y) = 0$ si ottiene immediatamente $f(x) = 2f(x) + x$ e quindi $f(x) = -x$. Verifichiamo che la funzione trovata risolve l'equazione:

$$f\left(x - f(y)\right) = f(x + y) = -x - y = 2(-x) + x - y = -x - y.$$

Dunque

$$-x - y = -x - y.$$

Esempio 4 Trovare tutte le funzioni reali di variabile reale f che soddisfano la relazione $f(x) + x \cdot f(1 - x) = x^2 + 1$ per qualsiasi valore di x.

Soluzione Scrivendo al posto di x la quantità $1 - x$ la relazione diventa:

$$f(1 - x) + (1 - x) \cdot f(x) = (1 - x)^2 + 1,$$

da quest'ultima si ricava allora che

$$f(1 - x) = (1 - x)^2 + 1 - (1 - x) \cdot f(x).$$

È possibile quindi sostituire nell'uguaglianza descritta al posto di $f(1 - x)$ la quantità appena ricavata nell'equazione precedente. In questo modo si ottiene:

$$\begin{gathered} f(x) + x \cdot \left[(1 - x)^2 + 1 - (1 - x) \cdot f(x)\right] = x^2 + 1; \\ f(x) + x(1 - x)^2 + x - (x - x^2) \cdot f(x) = x^2 + 1; \\ f(x) \cdot [1 - x + x^2] = x^2 + 1 - x + 2x^2 - x^3 - x. \end{gathered}$$

Si conclude che la soluzione cercata è:

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Osservazione Come abbiamo visto la risoluzione di equazioni funzionali è talvolta un compito che richiede di procedere per tentativi...con un pizzico di fantasia. L'importante è non farsi impaurire dal problema e cominciare a fare qualcosa di "semplice" (come sostituire o verificare con funzioni note...)

3 Come scrivere la soluzione

Nell'ambito di una gara olimpica, anche le **modalità di scrittura della soluzione** assumono un ruolo molto importante. Nel concludere l'esercizio, bisogna:

1. enunciare il risultato ottenuto: "*Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni...*";

2. verificare che le soluzioni trovate verifichino effettivamente l'equazione funzionale: *sostituire nell'equazione iniziale le soluzioni* individuate e fare tutti i calcoli richiesti per verificarla;

3. *esporre*, con ordine, *le manipolazioni algebriche e le sostituzioni* che permettono di ottenere, a partire dall'equazione data, la soluzione o le soluzioni.

Esempio 5 Data $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, risolvere l'***equazione di Cauchy***

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{2}$$

Soluzione Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni (lineari) della forma $f(x) = kx$, con $k \in \mathbb{Q}$.

Verifichiamo che tali funzioni sono effettivamente le soluzioni cercate: sostituendo tali funzioni lineari nell'equazione data, si ottiene $k(x+y) = kx + ky$, ovvero tali funzioni risolvono l'equazione (2).

Ora dimostriamo che tutte le soluzioni sono della forma $f(x) = kx$ dove $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, esponendo le manipolazioni algebriche che ci hanno permesso di determinarle:

- **Passo 1** $f(0) = 0$.

  Infatti, sostituendo $x = y = 0$ nella (2), otteniamo $f(0) = f(0) + f(0)$ da cui $f(0) = 0$.

- **Passo 2** $f(-q) = -f(q) \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

  Infatti, sostituendo nella (2) $x = q, y = -q$, otteniamo $x + y = q - q = 0$, ovvero $f(-q) = -f(q)$.

  Poniamo $k = f(1)$:

- **Passo 3** $f(n) = kn \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  Per questo risultato procediamo per induzione:

  base dell'induzione: se $n = 0$ (Passo 1), $f(0) = 0$;

  passo induttivo: posto $n + 1 = x + y$ con $x = n$ e $y = 1$, si ha

  $$f(n+1) = f(n) + f(1) = kn + k = (n+1)k$$

- **Passo 4** $f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}$

  Procediamo di nuovo per induzione:

  base dell'induzione: se $n = 0$ (Passo 1), $f(0) = 0$;

  passo induttivo:

  $$f\left((n+1)x\right) = f\left(nx + x\right) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)\, f(x)$$

  dove $y = nx$.

- **Passo 5** Tutte le soluzioni sono quindi della forma $f(x) = kx \quad k \in \mathbb{Q}$

  Sia $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, con n, m interi positivi. Poniamo $x = \frac{m}{n}$ e sfruttiamo lo step 4:

  $$nf(x) = nf\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m) = km$$

  Quindi

  $$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = k\frac{m}{n} = kx. \tag{3}$$

  In particolare:

  $\star$) se $x = 0$ per il passo 1 abbiamo $f(0) = 0$;

  $\star$) se $x < 0$, per il passo 2 otteniamo $f(x) = -f(-x) = -\left(k(-x)\right) = kx$, con $-x$ razionale positivo;

  $\star$) se $x > 0$ vale passo 5.

Quindi tutte le funzioni del tipo $f(x) = kx$ per $k = f(1)$ razionale sono soluzioni dell'equazione (1).

Osservazione Queste soluzioni sono uniche se x, y appartengono a $\mathbb{Q}$[1], mentre nell'insieme dei numeri reali non si può dire nulla (la dimostrazione è difficile e "poco olimpica").

[1]Si può dimostrare la tesi anche per funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ e da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$

4 Esercizi applicativi

Esercizio 1: COPPA GALILEO 2013 Un'altra delle funzioni che il comandante dei Guardiani della Notte utilizza è una funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ razionale di variabile razionale tale che

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

per ogni x e y numeri razionali. Il comandante sa che $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{8}{7}$ e calcola $f\left(\frac{49}{2}\right)$. Che risultato trova?

Soluzione Osserviamo che l'equazione richiama l'equazione funzionale di (2). Pertanto usando le soluzioni ricavate dalla (3), sappiamo che:

$$f(x) = f\left(\frac{7}{8}\right) = k \cdot x = k \cdot \frac{7}{8} = \frac{8}{7}$$

da cui $k = \frac{64}{49}$ e quindi $f\left(\frac{49}{2}\right) = \frac{64}{49} \cdot \frac{49}{2} = 32$.

Esercizio 2: GARA A SQUADRE SMC 2017 UDINE Una delle più strepitose invenzioni del Prof. Farnsworth è la scatola del multi universo. Questa scatola ha un funzionamento semplice: la si può assimilare ad una funzione f definita sui reali tale che soddisfi, per ogni x, y reale, $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ e $f(x+y) = f(x^{2017}) + f(y^{2017})$. Per evitare danni all'universo il Prof. chiude la scatola nella vasca delle ostriche giganti, il cui codice di apertura è la somma di tutti i possibili valori assumibili da $f(\sqrt{3753})$. Determinarlo.

Soluzione Osserviamo che le due equazioni sono simmetriche (posso sostituire x con y e viceversa, senza modificare le funzioni iniziali date). Proviamo a fare alcune sostituzioni nella $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.
Posto $x = 0$ e $y = 2$ (per simmetria si sarebbe potuto anche sostituire alla x il numero 2 e alla y lo 0) si ottiene: $f(0) = 2f(0)$ da cui si ricava che $f(0) = 0$.
Posto $x = 1$ e $y = 1$, si ottiene $f(1) = 2f(1)$ da cui $f(1) = 0$.
Consideriamo ora l'equazione $f(x+y) = f(x^{2017}) + f(y^{2017})$ e sostituiamo alla variabile y il valore 0:

$$f(x+0) = f(x) = f\left(x^{2017}\right) + f\left(0^{2017}\right) = f(x^{2017}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per simmetria, se $x = 0$, $f(y) = f(y^{2017}) \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
Pertanto:

$$f(x+y) = f(x^{2017}) + f(y^{2017}) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

che ci riconduce all'equazione di Cauchy.[2]

$$f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostriamo per induzione che $f(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$:

- se $n = 0, f(0) = 0$ è verificata.

Supponiamo ora $f(n) = 0$ vera per ipotesi induttiva fino ad un dato n naturale.

- $f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 0 = f(n)$, ovvero $f(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Per calcolare $f\left(\sqrt{3753}\right)$, poniamo $x = y = \sqrt{n}$ nell'equazione $f(xy) = xf(y) + yf(x)$:

$$0 = f(n) = f(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = \sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \cdot f(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n} f(\sqrt{n})$$

ovvero

$$f(\sqrt{n}) = 0.$$

Pertanto, $f(\sqrt{3753}) = 0$.

Esercizio 3: GARA A SQUADRE 2011 - Semifinale c - Parabolix ha il sospetto che, ancora una volta, alcuni Romani si siano travestiti da Galli e si siano intrufolati nel villaggio. Sapendo la superiorità dei Galli sui Romani in matematica (non per nulla è stato lui a insegnarla al villaggio), per individuarli prova a sottoporre a tutti il seguente quesito. Sia f una funzione tale che $f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = x$, con $x \neq 0, 1$. Determinare $f(10)$. Rispondere con la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione Cerchiamo le soluzioni del'equazione funzionale:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \tag{4}$$

riscrivendo le equazioni dopo opportune sostituzioni si ha:

- $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

$$f\left(\tfrac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}}\right) = \frac{1}{1-x}$$

[2] Attenzione: questa è un'equazione di Cauchy in $\mathbb{R}$, pertanto non possiamo affermare che la soluzione sia una funzione lineare del tipo vista prima

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x} \tag{5}$$

- $x \mapsto\ 1-\dfrac{1}{x}$

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=1-\frac{1}{x}$$

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x)=1-\frac{1}{x} \tag{6}$$

Se dalla (6) sottraggo la (5), ottengo un'equazione che sommata alla (4) consente di ricavare la soluzione:

$$\begin{aligned} 2f(x) &= x-\frac{1}{1-x}+1-\frac{1}{x} \\ f(x) &= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1-x}+1-\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Quindi $f(10)=\dfrac{1}{2}\left(10+\dfrac{1}{9}+1+\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{991}{180}$. Pertanto la soluzione cercata è: $991+180=1171$.

Esercizio 4: GARA A SQUADRE CESENATICO 2000 Una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifica l'uguaglianza

$$f\left((x-y)^2\right)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2 \tag{7}$$

per ogni coppia di numeri reali x e y. Calcolare la somma di tutti i valori che può assumere $f(2000)$.

Soluzione Poniamo $x=y=0$ e calcoliamo l'uguaglianza:

$$f(0)=f^2(0)-2\cdot 0\cdot f(0)+0^2$$

ovvero

$$f(0)=f^2(0)$$

da cui

$$f(0)=0\ \vee\ f(0)=1.$$

Scambiamo tra loro le variabili x e y; sappiamo che

$$f\left((y-x)^2\right) = f\left((x-y)^2\right); \tag{8}$$

e

$$f\left((y-x)^2\right) = f^2(y) - 2yf(x) + x^2 \tag{9}$$

Quindi, sostituendo nella (7) i secondi membri delle (8) e (9) si ottiene:

$$f^2(y) - 2yf(x) + x^2 = f^2(x) - 2xf(y) + y^2$$

da cui, posto $y = 0$, si ricava l'equazione:

$$f^2(0) + x^2 = f^2(x) - 2xf(0).$$

- se $f(0) = 0$ allora $f^2(x) = x^2$ da cui si ottiene la prima soluzione $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (scartando la soluzione $f(x) = -x$).[3]
- se $f(0) = 1$ allora si ha $f^2(x) - 2x = x^2 + 1$ da cui si ottiene la seconda soluzione $f(x) = x + 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, da cui si ottiene la seconda soluzione $f(x) = x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (scartando la soluzione $f(x) = -x - 1$).[4]

Allora le soluzioni sono tutte e sole le funzioni $f(x) = x$ o $f(x) = x + 1$ per ogni x reale. Quindi, la somma di tutti i valori assumibili da $f(2000)$ è: $2000+(2000+1) = 4001$.

Esercizio 5: STAGE SENIOR 2014 Determinare quante sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x). \tag{10}$$

Soluzione Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = cx$ per ogni x reale, con $c = 0$ o $c = 2$. Verifichiamo tali soluzioni:
dato che $f(x \cdot cy) = c \cdot xy = x \cdot cy + y \cdot cx = 2cxy$,

[3] Infatti, sostituendo $f(x) = x$ nella (3) si ottiene l'identità $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, mentre, sostituendo $f(x) = -x$ nella stessa equazione, si ottiene l'uguaglianza falsa $-(x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

[4] Se sostituiamo $f(x) = x+1$ nella (7), il primo e il secondo membro diventano rispettivamente $(x-y)^2 + 1$ e $(x+1)^2 - 2(x)(y+1) + y^2$. Quindi:

$$(x-y)^2 + 1 = (x+1)^2 - 2(x)(y+1) + y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 1$$

Se invece sostituiamo $f(x) = -x - 1$ nella stessa equazione si ottiene l'uguaglianza falsa:

$$-(x-y)^2 - 1 = (-x-1)^2 - 2x(y-1) + y^2 = x^2 + 1 + 2x + 2x + 2xy + y^2 = x^2 + 4x + y^2 + 2xy + 1.$$

- se $c = 0$, ovvero se la soluzione è $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, allora $f(0) = 0 \cdot y + x \cdot 0 = 0$ (dato che per $x = 0$ e $y = 2$, $f(0) = 0$), pertanto $0 = 0$;

- se $c = 2$, ovvero se la soluzione è $f(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{R}$, allora $f(x \cdot 2y) = 2 \cdot 2xy = 4xy = x \cdot 2y + y \cdot 2x = 4xy$, pertanto si ha $4xy = 4xy$.

Ora dimostriamo che tutte le soluzioni sono della forma $f(x) = cx$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $c = 0 \vee c = 2$, illustrando le manipolazioni algebriche.

Prima dimostrazione

Se $f(x) = cx$, allora sostituendo $y = 1$ nella (10) e ponendo $f(1) = c$, si ottiene $f(xf(1)) = f(cx) = xf(1) + 1f(x) = xc + cx = 2cx$ ovvero $f(cx) = 2cx$. Se c è diverso da zero, questo implica facilmente che $f(y) = 2y$, per ogni y (perché ogni y si scrive come cx per $x = \frac{y}{c}$). Questo dimostra che le uniche funzioni di tipo $f(x) = cx$ che risolvono l'espressione dell'esercizio sono quelle in cui $c = 0$ oppure $c = 2$.

Seconda dimostrazione

- **Passo 1** Il secondo membro della (10) è simmetrico; pertanto anche il primo membro risulta simmetrico:

$$f(xf(y)) = f(yf(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Passo 2** Se f è iniettiva (ovvero $f(x_1) = f(x_2)$ solo se $x_1 = x_2$), dalla simmetria messa in evidenza, si evince che $xf(y) = yf(x)$. Posto $y = 1$, si ottiene

$$xf(1) = 1 \cdot f(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

ovvero

$$f(x) = cx$$

con $c = f(1)$ costante reale. Quindi, per l'iniettività di f e per la simmetria dei suoi termini, si può dire che f vale:

$$xf(y) = yf(x) = cx$$

e

$$f(y) = cy.$$

Allora:

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x) = 2xf(y) = 2cxy$$

ma anche

$$f(xf(y)) = cxf(y) = cx \cdot cy = c^2xy.$$

Pertanto

$$c^2xy = 2cxy \iff c = 0 \vee c = 2$$

- **Passo 3** Se f non è iniettiva, ovvero $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow f(y_1) - f(y_2) = 0$ con $y_1 \neq y_2$, possiamo scrivere:

$$\begin{gathered} f(y_1) = xf(y_1) + y_1f(x) \\ f(y_2) = xf(y_2) + y_2f(x). \end{gathered}$$

Sapendo che $f(y_1) = f(y_2)$,

$$\begin{gathered} xf(y_1) + y_1f(x) = xf(y_2 + y_2f(x) \\ \Downarrow \\ xf(y_1) + y_1f(x) = xf(y_1) + y_2f(x) \\ \Downarrow \\ y_1f(x) = y_2f(x) \\ \Downarrow \\ (y_1 - y_2)f(x) = 0. \end{gathered}$$

Questo implica che $y_1 = y_2 \ \vee f(x) = 0$:

  - Se $y_1 = y_2$, otteniamo un assurdo (f non è iniettiva). Pertanto, f deve essere iniettiva e le uniche soluzioni sono date da $f(x) = 0$ o $f(x) = 2x$, con x reale.
  - Se $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, otteniamo l'unica soluzione nel caso di funzione non iniettiva; essa risulta essere una delle due soluzioni calcolate inizialmente.

Esercizio 6: IMO 2010 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per le quali vale

$$f\left([x]\, y\right) = f(x)\left[f(y)\right] \tag{11}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Si ricorda che $[x]$ rappresenta il più grande intero minore a x.

Soluzione Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = C$, con $C = 0$ o $1 \leqslant C < 2$.
Verifichiamo la validità di tali soluzioni:

$$f\left([x]\,y\right) = C$$

d'altra parte

$$f\left([x]\,y\right) = f(x)\left[f(y)\right] = C \cdot [C]$$

Pertanto $C = C\,[C]$ se $C = 0$ o se $C = 1$. In questo secondo caso $1 \leqslant C < 2$.

Prima dimostrazione

Sia $x = 0$. Allora

$$f(0) = f(0) \cdot \left[f(y)\right], \tag{12}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo due casi:

Primo caso: $f(0) \neq 0$

Dalla (12) si ottiene che $[f(y)] = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Perciò l'equazione (11) equivale alla $f\left([x]\,y\right) = f(x)$ e sostituendo all'incognita y il valore zero, si ottiene $f(0) = f(x) = C$ con C costante non nulla (siamo nelle ipotesi che $f(0) \neq 0$). Ovvero $[f(y)] = 1 = [C]$, dove $1 \leqslant C < 2$.

Secondo caso: $f(0) = 0$

Occorre considerare due sottocasi:

- Esiste $0 < \lambda < 1$ tale che $f(\lambda) \neq 0$. Posto $x = \lambda$ nella (11), si ottiene $f\left([\lambda]\,y\right) = f(\lambda)\left[f(y)\right]$ dove $f\left([\lambda]\,y\right) = f(0 \cdot y) = f(0)$. Quindi $0 = f(0) = f(\lambda)\left[f(y)\right]$, $\forall y \in \mathbb{R}$, ovvero $[f(y)] = 0$. Sostituendo infine $x = 1$ nella (11), si ottiene $f\left([1]\,y\right) = f(y) = f(1)\left[f(y)\right] = f(1) \cdot 0 = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, che è in contraddizione con l'esistenza di un λ tale che $f\left(\lambda\right) \neq 0$.

- Al contrario, supponiamo che $f\left(\lambda\right) = 0$, $\forall \lambda \in [0;1)$. Consideriamo z reale tale che $\lambda = \dfrac{z}{N} \in [0;1)$ con[5] $N \in \mathbb{Z}$. Dalla (11) si ottiene $f(z) = f\left([N]\,\lambda\right) = f(N)\left[f(\lambda)\right] = 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

Seconda dimostrazione

[5] Si può porre $N = [z] + 1$ se $z \geqslant 0$ o $N = [z] - 1$ altrimenti

Posto $[f(y)] = 0$ per qualche y, allora la sostituzione $x = 1$ dimostra che $f(y) = f(1)\,[f(y)] = 0$[6], allora $f(y) = 0$. Quindi se $[f(y)] = 0$ per ogni y, allora $f(y) = 0,\ \forall y$. Questa funzione verifica le condizioni poste nel problema.
Consideriamo il caso in cui $[f(\lambda)] \neq 0$ per qualche λ. Allora, sostituendo $y = \lambda$ nella (11), abbiamo che:

$$f(x) = \frac{f([x]\,\lambda)}{[f(\lambda)]}. \tag{13}$$

Questo significa che $f(x_1) = f(x_2)$ ogniqualvolta $[x_1] = [x_2]$.
Possiamo supporre che $\lambda \in \mathbb{Z}$. Allora otteniamo che

$$f(\lambda) = f\left(2\lambda \cdot \frac{1}{2}\right) = f(2\lambda)\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = f(2\lambda)\,[f(0)]$$

che implica $f(\lambda) \neq 0$. Possiamo quindi supporre che $\lambda = 0$; la (13) può essere riscritta come

$$f(x) = \frac{f(0)}{[f(0)]} = C \neq 0,\ \forall x.$$

Quindi la (11) diventa equivalente all'equazione $C = [C]$ che implica che $[C] = 1$.

Esercizio 7: IMO 2015 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1. \tag{14}$$

Soluzione Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo:

$$f(x) = -1 \text{ e } f(x) = x + 1.$$

Vediamo che entrambe le funzioni soddisfano la (14):

- Sia $f(x) = -1$: nel primo membro della (14), si ha che $f(x - f(y)) = -1$; nel secondo $f(f(x)) - f(y) - 1 = f(-1) - f(-1) - 1 = -1$ (da cui l'identità per $f(x) = -1$).

- Sia $f(x) = x + 1$: nel primo membro della (14), si ha che $f(x - f(y)) = x - f(y) + 1 = x - (y+1) + 1 = x - y$; nel secondo membro $f(f(x)) - f(y) - 1 = f(x+1) - (y+1) - 1 = (x+1+1) - y - 2 = x + 2 - y - 2 = x - y$ (da cui l'identità per $f(x) = -1$).
  Illustriamo i passaggi algebrici che ci permettono di affermare che tutte le soluzioni sono della forma $f(x) = -1$ o $f(x) = x + 1$.
  Sia f una qualsiasi funzione che soddisfi la (14), per ogni x e y intere.

[6] infatti sostituendo $x = 1$ nella (11) si ottiene $f([1]\,y) = f(y) = f(1)\,[f(y)] = f(1) \cdot 0 = 0$

Sostituendo $x = 0$ e $y = f(0)$ nella (14), al primo membro si ottiene:

$$f\left(x - f(y)\right) = f\left(0 - f\left(f(0)\right)\right) = f\left(-f\left(f(0)\right)\right)$$

mentre al secondo membro otteniamo:

$$f\left(f(0)\right) - f(f\left(0\right)) - 1 = f(y) - f(y) - 1 = -1$$

Ora, posto $z = -f\left(f(0)\right)$, si ha $f(z) = 1$.
Ponendo $y = z$ nella (14) troviamo

$$f\left(x - f(y)\right) = f\left(x - f(z)\right) = f(x + 1).$$

D'altra parte vale:

$$f\left(x - f(y)\right) = f\left(f(x)\right) - f(z) - 1 = f\left(f(x)\right) + 1 - 1 = f\left(f(x)\right)$$

ovvero

$$f(x + 1) = f\left(f(x)\right), \ \forall x \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Sostituendo (15) nella (14) otteniamo:

$$f\left(x - f(y)\right) = f(x + 1) - f(y) - 1 \tag{16}$$

da cui ovviamente si ricava che $f(x + 1) = f\left(x - f(y)\right) + f(y) + 1$.
Dimostriamo che la soluzione f è lineare, per ogni valore di x intero.
Calcoliamo $f(x + 1) - f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= f\left(x - f(y)\right)+f(y)+1-f(x) = f\left(x - f(x)\right)+f(x)+1-f(x) = \\ &= f\left(x - f(x)\right) + 1 = f\left(f\left(x - f(x) - 1\right)\right) + 1 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza della (15) applicata alla $f\left(x - f(x)\right)$.
Calcoliamo ora $f\left(x - f(x) - 1\right)$, usando la (16) su tale funzione. Otteniamo:

$$f\left(x - f(x) - 1\right) = f(x - 1 + 1) - f(x) - 1 = f(x) - f(x) - 1 = -1.$$

Possiamo quindi affermare che:

$$f(x + 1) - f(x(= f\left(x - f(y)\right) + 1 = f\left(f\left(x - 1 - f(y)\right)\right) + 1 = f(-1) + 1;$$

e, posto $f(-1) + 1 = A$ con A costante, si ha che :

$$f(x + 1) = f(x) + A.$$

Per induzione, applicata ad entrambi i membri, si dimostra che f è lineare e vale $f(x) = Ax + B$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, dove $B = f(0)$.
Sostituendo quest'ultima soluzione nella (15) otteniamo:

$$f(x+1) = f(f(x)) = f(Ax+B) = A(Ax+B) = A^2x + AB + B, \tag{17}$$

$\forall x \in \mathbb{Z}$. D'altra parte

$$f(x+1) = f(x) + A = Ax + B + A. \tag{18}$$

Sostituendo $x = 0$ nella (17) otteniamo che $f(0+1) = f(1) = AB + B$, mentre sostituiamo la medesima quantità nella (18), ricaviamo $f(0+1) = f(1) = B + A$. Quindi $AB + B = A + B$.

Sostituendo infine $x = 1$ nella nella (17), otteniamo che $f(1+1) = f(2) = A^2 + AB + B$, mentre se effettuiamo la sostituzione nella (18) abbiamo $f(1+1) = f(2) = B + 2A$. Quindi $A^2 + AB + B = 2A + B$, ovvero $A^2 = A$, da cui $A = 0$ o $A = 1$.

- Se $A = 1$, dalla $AB + B = A + B$ si ottiene che $B = 1$ e quindi vale $f(x) = x + 1$.
- Se $A = 0$, allora $f(x+1) = f(x) = cost$ e la (14) mostra che tale costante vale -1.

Bibliografia

Barsanti, Conti, De Lellis, Franzoni, *Le Olimpiadi della Matematica*, Bologna, Zanichelli, 2011

Engel A., *Problem-Solving Strategies*,Verlag New York, Inc. Sprienger, 1997

Gobbino M., *Schede olimpiche per la preparazione alle Olimpiadi della Matematica*, Bologna, Unione Matematica Italiana, 2003

Vidoni A. , *Raccolta di problemi in preparazione alle Gare di Matematica*, 2008

Sitografia

http://pages.di.unipi.it/fpoloni/oli/files/arnesi.pdf

http://imomath.com/index.php?options=338

https://es.scribd.com/document/357449579/ecuacionesfuncionales1-pdf

http://alessandracaraceni.altervista.org/?stage=stage-senior-2014

https://www.imo-official.org/problems/IMO2015SL.pdf

https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf

http://olimpiadi.dm.unibo.it/area-downloads/