ESERCIZI di ALGEBRA

Titolo nota 15/10/2017

Esercizio 1

$p(1) = 7 \qquad p(7) = 1 \qquad p(4) = ?$

Le condizioni $q(1)=7$, $q(7)=1$ determinano in modo univoco un polinomio $q(x)$ di grado 1
$q(x) = -x + 8$

Consideriamo $r(x) = p(x) - q(x) = p(x) + x - 8$.
$r(1) = r(7) = 0$

Possiamo scrivere $r(x) = (x-1)(x-7)\,s(x)$
($s(x)$ è a coefficienti interi)

$$p(x) = (x-1)(x-7)\,s(x) - x + 8$$

Calcoliamo: $p(4) = (4-1)(4-7)\,s(4) - 4 + 8$
$= -9\,s(4) + 4$

$s(4)$ è un qualsiasi numero intero

Soluzione: $p(4)$ è un qualsiasi intero che si scrive nella forma $-9k+4$, $k \in \mathbb{Z}$.

— o — o —

ESERCIZIO 2

$p(x)$ grado 2016 $\qquad p(i) = \frac{1}{i} \quad \forall i \in \{1, \dots, 2017\}$

$q(x) = x\,p(x) - 1$

$q(1) = q(2) = \dots = q(2017) = 0$
q ha grado 2017

Possiamo scrivere $q(x) = k \cdot (x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-2017)$
$= x\,p(x) - 1$

Calcoliamo k: uguagliamo i termini noti dei due polinomi

$$k \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-2017) = -1$$
$$k (-1)^{2017} \cdot 2017! = -1$$
$$k = \frac{1}{2017!}$$

$$q(x) = \frac{1}{2017!} (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-2017) = x\,p(x) - 1$$

$$x = 2018 : \quad \frac{1}{2017!} \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 1 = 2018\, p(2018) - 1$$
$$1 = 2018\, p(2018) - 1$$
$$p(2018) = \frac{2}{2018} = \frac{1}{1009}$$

— o — o —

ESERCIZIO 3

$$p(x) = x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ radici di $p(x)$ $\qquad \alpha\beta = -32$

Trovare k.

Sappiamo che $\alpha\beta\gamma\delta = -1984 \rightsquigarrow \gamma\delta = 62$.

Scriviamo $p(x) = q_1(x)\, q_2(x)$ $\qquad$ q_1, q_2 di grado 2
q_1 ha radici α, β
q_2 ha radici γ, δ

$$q_1(x) = x^2 + ax - 32 \qquad q_2(x) = x^2 + bx + 62$$

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = (x^2 + ax - 32)(x^2 + bx + 62)$$

Termine di grado 3 : $-18 = a + b$
" " " 1 : $200 = 62a - 32b$
$$\left.\begin{array}{l} -18 = a+b \\ 200 = 62a - 32b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -4 \\ b = -14 \end{array}$$

Prendiamo coefficienti di x^2 : $k = 62 + ab - 32 =$
$= 30 + 56 = 86$.

— o — o —

ESERCIZIO 4

$$p(x) = \left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{3} \right)^{2017} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{8068} x^{8068}$$

$$a_1 + a_4 + \ldots + a_{8068} = ?$$

Notiamo che $a_1 = a_3 = \dots = a_{8067} = 0$.
Poniamo $y = x^2$

$$q(y) = \left(\frac{y^2+y+1}{3}\right)^{2017} = b_0 + b_1 y + \dots + b_{4034} y^{4034}$$

$$b_i = a_{2i}$$

$$a_n + a_4 + a_7 + \dots + a_{8068} = b_2 + b_5 + \dots + b_{4034}$$

Consideriamo $y^3 - 1$.
Scriviamo: $q(y) = (y^3-1)\, s(y) + r(y)$

$$r(y) = ay^2 + by + c$$

Possiamo notare che $b_2 + b_5 + \dots + b_{4034} = a$

$r(y)$ si ottiene da $q(y)$ ponendo $y^3 = 1$

$$\begin{aligned} q(y) = &\ b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \\ &+ b_3 y^3 + b_4 y^4 + b_5 y^5 + \quad \to \text{raccolgo } y^3 \\ &\ \vdots \\ &+ \dots + b_{4033} y^{4033} + b_{4034} y^{4034} \quad \to \text{raccolgo } y^{4032} \end{aligned}$$

$$\equiv (b_0 + \dots + b_{4032}) + y\,(b_1 + \dots + b_{4033}) + y^2 (b_2 + \dots + b_{4034})$$
modulo $y^3 - 1$

Noto che $y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$

Il resto della divisione di $q(x)$ per $(y-1)$ o (y^2+y+1) è lo stesso resto che ottengo nella divisione di $r(x)$ per $(y-1)$ o (y^2+y+1).

- y^2+y+1 divide $q(x)$ $\Rightarrow r(y) = ay^2 + by + c$ è divisibile per y^2+y+1
$\Rightarrow a = b = c$

- Il resto della divisione di $q(x)$ per $(x-1)$ è $q(1) = 1$.
$\Rightarrow$ il resto della divisione di $r(x) = a(y^2+y+1)$ per $(x-1)$ è $r(1) = 3a = 1$ $\Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$$r(y) = \frac{1}{3}(y^2+y+1) \Rightarrow b_2 + \dots + b_{4034} = \frac{1}{3}$$

$$p(x) = \frac{(1+x^2+x^4)^{2017}}{3^{2017}} = \frac{q(x)}{3^{2017}}$$

$$q(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{8068} x^{8068}$$

$$r(x) = \frac{q(x)-1}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots$$

$$z^3 = 1 \rightsquigarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$r(1) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

$$r(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 + a_5 z + \dots$$

$$r(z^2) = a_1 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 + a_5 z^2 + \dots$$

$$r(1) + r(z) + r(z^2) = 3a_1 + 3a_4 + \dots$$

$$r(1) = \frac{q(1)-1}{1} = 3^{2017} - 1 \qquad r(z) = -\frac{1}{z} \qquad r(z^2) = -\frac{1}{z^2}$$

$$3^{2017} - 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = 3^{2017} - \frac{z^2+z+1}{z^2} = 3^{2017}$$

$$r(1) + r(z) + r(z^2) = 3^{2017} = 3 \cdot S \rightarrow S = 3^{2016} \rightarrow 1/3$$

$$\underbrace{\left(\frac{1+x^2+x^4}{3}\right)^{2016}}_{q(x)} \cdot \frac{1+x^2+x^4}{3}$$

$$\boxed{a_k x^k} \rightarrow \frac{a_k x^k + a_k x^{k+2} + a_k x^{k+4}}{3}$$

$$\frac{1}{3} \sum a_k (q(x)) = \frac{1}{3} q(1) = \frac{1}{3}$$

— o —

$$S = \{1, 2, \dots, 2017\}$$

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \qquad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + \frac{1}{6} = 3$$

$$\boxed{S_{n+1} = \frac{1}{n+1} + S_n + \frac{1}{n+1} S_n}$$

$$\{1, 2, \sim, n+1\}$$

$$\frac{1}{n+1} + n + \frac{n}{n+1} = n+1$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{S_n}{n+1} \qquad T_n = \frac{S_n}{n+1}$$

$$T_{n+1} = \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} + T_n$$

$$\| $$

$$\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + T_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} + T_1 = -\frac{1}{n+2} + 1$$

$$T_1 = \frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$S_{n+1} = n+2-1 = n+1$$

$$\{1, 2, ---, 2017\}$$

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sim, \frac{1}{2017}\right\}$$

$$P(x) = (x+1)(x+1/2)(x+1/3) --- (x+\frac{1}{2017})$$

$$P(1) - 1 = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} \cdots \frac{2018}{\cancel{2017}} - 1 = 2017$$

ESERCIZIO 6

$a_0, \dots, a_m \qquad a_0 = 37 \quad a_1 = 72 \qquad a_m = 0$

$$a_{k+1} = a_{k-1} - \frac{3}{a_k} \qquad k = 1, \dots, m-1 \qquad m?$$

$$k = m-1 \to 0 = a_m = a_{m-2} - \frac{3}{a_{m-1}} \quad \Rightarrow \quad a_{m-1}a_{m-2} = 3$$

Inoltre $\quad a_k a_{k+1} = a_{k-1} a_k - 3 \qquad k = 1, \dots, m-1$

$$a_{k-1} a_k = a_k a_{k+1} + 3$$

Ricaviamo: $\quad a_{m-3} a_{m-2} = a_{m-2} a_{m-1} + 3 = 3 + 3 = 6$

$$a_{m-4} a_{m-3} = 6 + 3 = 9$$

$$\dots$$

$$a_{m-n-1} a_{m-n} = 3n$$

Sappiamo che $\quad a_0 a_1 = 37 \cdot 72 = 3(m-1)$

$$\Rightarrow \quad m - 1 = \frac{37 \cdot 72}{3} = 888$$

cioè $\quad m = 889$.

— o — o —

ESERCIZIO 7

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(\underline{f(x) + y}) = f(\underline{x^2 - y}) + 4f(x)y$

$\boxed{y=0} \qquad f(f(x)) = f(x^2)$

$\boxed{x=0} \qquad f(f(0) + y) = f(-y) + 4f(0)y$

Idea: se $f(x) + y = x^2 - y$ otteniamo $4f(x)y = 0$

Sostituiamo $\quad y = \dfrac{x^2 - f(x)}{2}$:

$$f\left(f(x) + \cancel{\frac{x^2 - f(x)}{2}}\right) = f\left(x^2 - \cancel{\frac{x^2 - f(x)}{2}}\right) + 4f(x)\frac{(x^2 - f(x))}{2}$$

Otteniamo: $\quad f(x)(x^2 - f(x)) = 0 \qquad \forall x$

Fissato x, si ha che $f(x) = 0$ oppure $f(x) = x^2$

Troviamo che:

- $f \equiv 0$ è soluzione (→ fare la verifica)
- $f(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione: verifichiamo

$$f(f(x)+y) = f(x^2+y) = (x^2+y)^2$$
$$f(x^2-y)+4f(x)y = (x^2-y)^2 + 4x^2y \quad))$$

Potrebbe succedere che $f(x)=0$ per alcuni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2$ per gli altri.
Dimostriamo che non è possibile trovarsi in una "situazione mista".

- $f(0) = 0$
- $f(f(0)+y) = f(-y) + 4f(0)y$

$$f(y) = f(-y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Supponiamo che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a)=0$, $a \neq 0$.
Vogliamo dire che allora $f \equiv 0$.

$$f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4f(x)y$$

Sostituiamo $x = a$: $f(f(a)+y) = f(a^2-y) + 4f(a)y$
$$\Rightarrow f(y) = f(a^2-y)$$

Per assurdo, esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $f(b) \neq 0$, cioè $b \neq 0, a$ e $f(b) = b^2$ $(\neq 0)$
Sostituiamo $y = b$: $f(b) = f(a^2-b) = b^2 \neq 0$

$$\Rightarrow f(a^2-b) = (a^2-b)^2 = b^2$$
$$= a^4 - 2a^2b + b^2$$
$$\Rightarrow a^4 - 2a^2b = 0 \quad (a \neq 0)$$
$$\Rightarrow b = a^2/2$$

L'unico punto in cui f può essere $\neq 0$ è $a^2/2$. $(\neq 0)$
f è pari: $f(a^2/2) = f(-a^2/2) \neq 0$
$\Rightarrow$ abbiamo almeno 2 punti in cui f è $\neq 0$. Assurdo.