NUMERI DI CATALAN

Montecatini 2017 - Sandro Campigotto

Titolo nota

I numeri di Catalan sono il passatempo preferito di molti matematici dilettanti (e professionisti).

Jon McCammond

Non è esagerato dire che i numeri di Catalan sono la sequenza più importante nel calcolo combinatorio

Manuel Kauers e Peter Paule

.

I numeri di Catalan sono ancora più affascinanti dei numeri di Fibonacci. Sono come la Stella Polare nel cielo della sera, una luce bella e luminosa nei cieli matematici.

Thomas Koshy

La successione dei numeri di Catalan è registrata nella OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) con la sigla A0000108

I primi 10 numeri di Catalan sono:

$C_0 = 1$	$C_5 = 42$
$C_1 = 1$	$C_6 = 132$
$C_2 = 2$	$C_7 = 429$
$C_3 = 5$	$C_8 = 1430$
$C_4 = 14$	$C_9 = 4862$

UNIVERSITÀ BOCCONI CENTRO PRISTEM

Ventunesima Edizione Nazionale

Finali italiane dei Campionati Internazionali di Giochi Matematici
Sabato 10 maggio 2014

10. Indovina le lettere!

FFJM è un numero di 4 cifre; JEU è un numero di 3 cifre; FFJM è anche la somma di JEU con 2014.
Sapendo che una stessa lettera rappresenta sempre la stessa cifra e che due lettere diverse rappresentano due cifre diverse, **quale cifra si nasconde dietro la lettera M?**

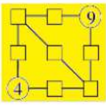
11. Mathcity, in autobus

Mathcity è un villaggio a pianta quadrata, dove ogni lato è lungo 5 km. Le sue vie (la loro larghezza è trascurabile) lo dividono in blocchi anch'essi quadrati di 200 m di lato. Il percorso dell'autobus di Mathcity è un circuito chiuso di 10 km di lunghezza.
Qual è, al massimo, l'area in km^2 situata all'interno di questo circuito?

12. Arsenio in azione

La cassaforte su cui Arsenio ha messo gli occhi è dotata di una tastiera con tre tasti che riportano rispettivamente le lettere A,B,C. Il codice segreto, che permette di aprirla, è una sequenza di queste tre lettere (con A, B e C eventualmente ripetute). Se gli ultimi tre tasti schiacciati sono quelli che formano il codice segreto, la cassaforte si apre. Grazie alla soffiata di un complice, Arsenio sa che il codice comincia con A.
Arsenio vuole schiacciare meno tasti possibile ma **quanti ne dovrà schiacciare per essere sicuro in ogni modo di aprire la cassaforte?**

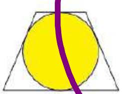
13. Numeri a due cifre



In ciascuno dei sette quadrati della figura scrivete un numero naturale di due cifre in modo che:

- i sette numeri siano tutti diversi tra loro;
- su ciascuno dei cinque allineamenti indicati con un segmento, il numero al centro sia il minimo comune multiplo degli altri due;
- nella diagonale, il numero in alto a sinistra sia maggiore di quello in basso a destra.

14. Cerchi e trapezi



In figura vedete un trapezio isoscele, le cui basi misurano 14 e 20 cm e i cui lati sono tangenti a una circonferenza.
Qual è (in cm^2) l'area del cerchio?
P.S. *Nel calcolo, scrivete 22/7 al posto di π.*

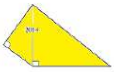
15. Al cinema

Le poltrone di una sala cinematografica sono complessivamente numerate da 1 a 2014, partendo dalla prima fila (quella più vicina allo schermo) e da sinistra a destra. Così, ad esempio, la poltrona n. 2 si trova all'intersezione della prima fila con la seconda colonna.
Sapendo che le varie file hanno tutte lo stesso numero di poltrone, **qual è il numero della poltrona che si trova all'intersezione della 20.esima fila con la 14.esima colonna?**

16. Super-resistente

Un'azienda di vasi ha inventato un modello super-resistente. Un addetto al test di qualità deve trovare il piano di un palazzo –il più alto possibile- dal quale il vaso può essere lasciato cadere senza rompersi. Stiamo parlando al minimo del primo piano, al massimo del sedicesimo. L'azienda ha consegnato all'addetto al test due vasi che lascerà cadere al suolo e può quindi rompere (tutte le prove a cui un vaso è sottoposto non cambiano le sue caratteristiche tecniche … a meno che non si rompa).
Nel caso più sfavorevole, qual è il numero minimo di test che garantisce l'individuazione del piano più alto da cui il vaso può essere lasciato cadere al suolo senza rompersi?

17. L'eredità

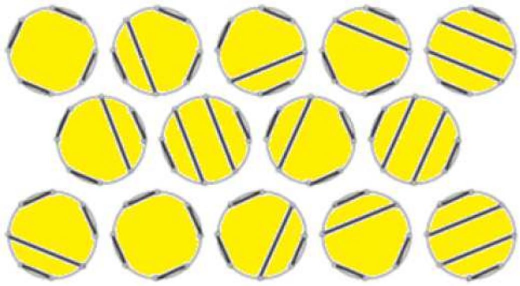


Amerigo e Renato hanno ricevuto in eredità il terreno che vedete in figura. È una buona eredità, anche se il perimetro non raggiunge i 10.000 decimetri. Si sono allora diviso il terreno in due parti che hanno, ciascuna, la forma di un triangolo rettangolo; il lato comune ha una lunghezza di 2014 dm e la misura di ogni lato è espressa da un numero intero di dm.
Qual è esattamente il perimetro dell'intero terreno?

18. La caccia ai fantasmi

Ci sono N cacciatori, a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l'emissione di un raggio che si propaga in linea retta e termina la sua corsa toccando un fantasma. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi. Cacciatori e fantasmi sono collocati in 2N punti equidistanti su una circonferenza. Per N = 1,2,3,5, il numero di strategie vincenti, che riescono a eliminare tutti i fantasmi, è rispettivamente 1,2,5,42. Per N = 4, la figura illustra le 14 strategie vincenti.
Quante sono per N=7?

18. La caccia ai fantasmi



Ci sono N cacciatori, a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l'emissione di un raggio che si propaga in linea retta e termina la sua corsa toccando un fantasma. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi. Cacciatori e fantasmi sono collocati in 2N punti equidistanti su una circonferenza. Per N = 1,2,3,5, il numero di strategie vincenti, che riescono a eliminare tutti i fantasmi, è rispettivamente 1,2,5,42. Per N = 4, la figura illustra le 14 strategie vincenti.
Quante sono per N=7?

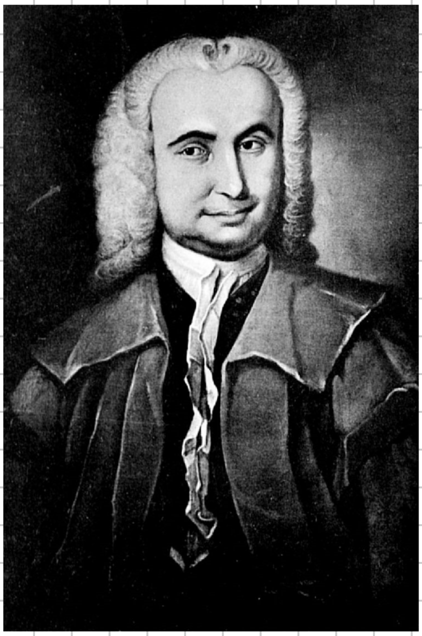
I PROTAGONISTI E LE FORMULE

MING ANTU (1692 circa - 1763 circa)
È stato un matematico e astronomo cinese nativo della Mongolia.
Nel 1730, ha scritto una libro dove troviamo la prima traccia dei numeri di Catalan all'interno di identità trigonometriche riguardanti serie di potenze.
Il libro non venne pubblicato se non nel 1839.
A parte la loro presenza, i numeri di Catalan non giocano alcun ruolo importante all'interno dei risultati trovati.

LEONHARD EULER (1707–1783)
Nel 1751 scrive una lettera a Goldbach nel quale risolve con la formula

$$\boxed{C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}}$$

il problema delle triangolazioni di un poligono (con n+2 lati).



JOHANN ANDREAS von SEGNER (1704–1777)
Nel 1755 Eulero lo aiuta ad entrare all'università di Halle.
Gli assegna come compito di calcolare le triangolazioni di un poligono e gli fornisce come stimolo il valore di C_7.
Segner affronta il problema e ottiene come risultato la formula:

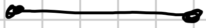
$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

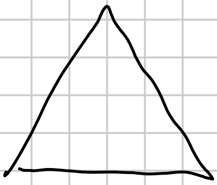
È il pezzo mancante della dimostrazione cercata da Eulero.

TRIANGOLAZIONI DI UN POLIGONO

$\boxed{n}+2$ agono

$\boxed{1}$ 3-agono → Triangolo

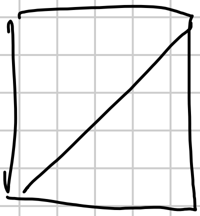


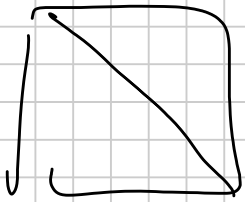


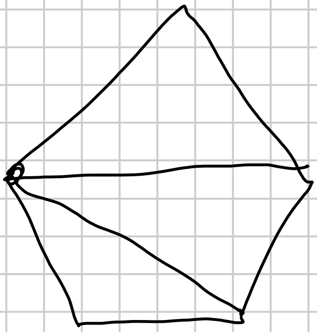
1

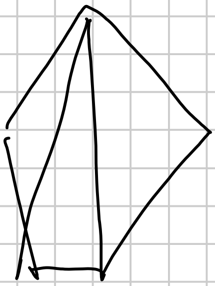
C_1

2+2 agono

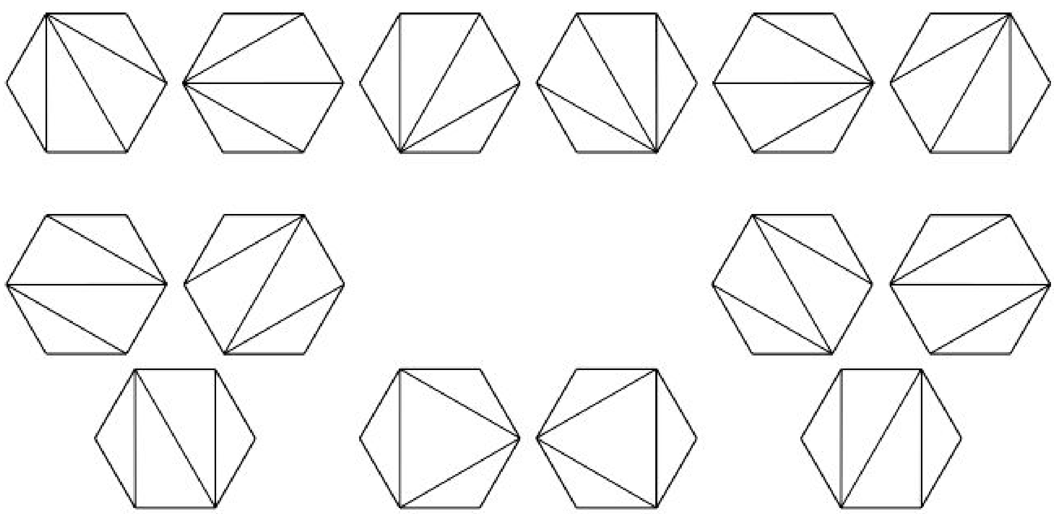








n+2=6



EUGENE CHARLES CATALAN (1814-1894)
La discussione sui risultati ottenuti è continuata negli anni seguenti all'interno delle università russe (in particolare S. Pietroburgo) e le scuole francesi.
Dalla scuola francese, ispirato dal maestro Lamé, il belga Eugène Charles Catalan nel 1838 arrivò al risultato

$$C_n = \underbrace{\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}} = \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

studiando il problema delle "parentesi ben poste"

Dovremmo chiamarli numeri di "Segner-Eulero"...
Per 100 anni si è ragionato e riflettuto ma sono rimasti praticamente sconosciuti e quasi dimenticati.
Ricompaiono in una *Teoria dei Numeri* di Eduard Lucas nel 1891 dove si tratta più di Calcolo Combinatorio che di teoria dei numeri. Il nome di Catalan compare nel libro grazie al problema delle parentesi.
Nel 1901 nel libro *Lehrbuch der Combinatorik* di Eugen Netto, il primo libro monografico sul Calcolo Combinatorio include un sacco di materiale relativo agli studi di Catalan.
Eric Temple Bell, in una nota a piè di pagina, di un suo articolo, si riferisce ai numeri citando il lavoro di Catalan.
Fu probabilmente l'americano combinatorista John Riordan (1903-1988) a coniare l'espressione "Numeri di Catalan" in tre articoli successivi.
Ai giorni nostri sono conosciuti in seguito al grande lavoro di raccolta di problemi sui numeri di Catalan fatto da William Brown attorno al 1965.

LE FORMULE

$$C_n = \frac{\overbrace{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot}^{C_{n-1}}(4n-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}$$

Formula di Eulero

Formula di Segner

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Formula Ricorsiva

$$C_n = \frac{(4n-2)}{(n+1)} C_{n-1}$$

$$C_0 = 1$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Formula Binomiale

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Formula di Catalan

Binomiale=Catalan

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\,n!}\,\underbrace{(n-1)!\cdot\frac{n}{n}}_{n!}} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \binom{2n}{n}\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n+1}$$

Ricorsiva=Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$C_n = \frac{(4n-2)}{(n+1)} C_{n-1}$$

$$C_0 = 1$$

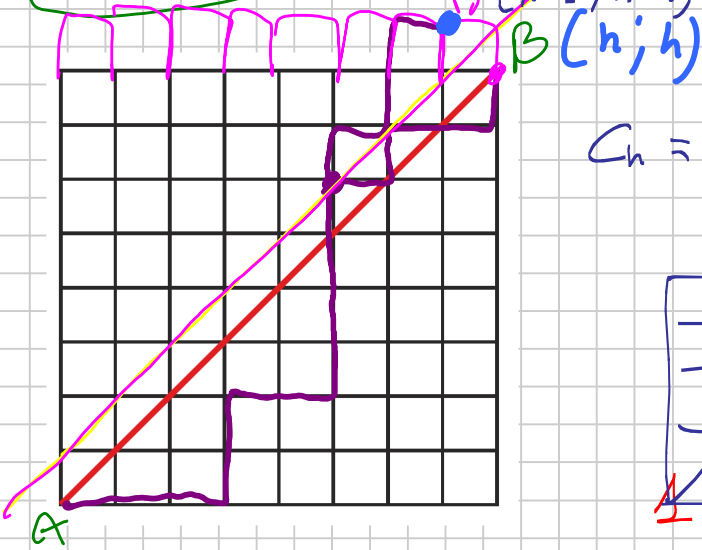
$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n+1}\,\frac{\cancel{(2n)!}\ 2\cancel{n}(2n-1)}{\cancel{n!}\,\cancel{n!}\ \cancel{n}}}{\frac{1}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{(2n-2)!}}{\cancel{(n-1)!}\,\cancel{(n-1)!}}} = \frac{4n-2}{n+1}$$

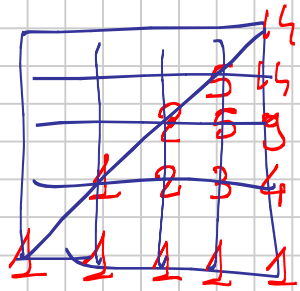
Double Counting

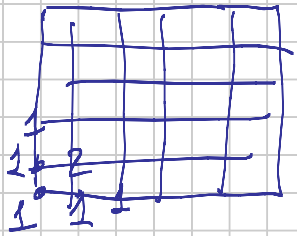
Binomiale=Segner

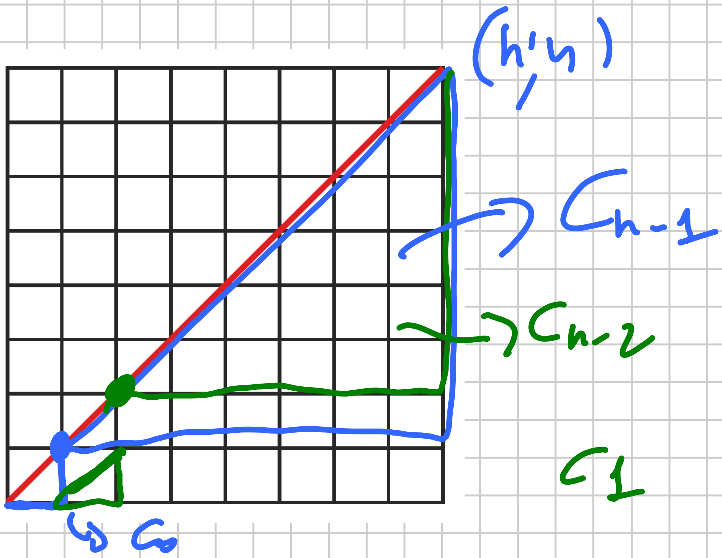
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$



$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$







$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2}$$

+

$C_0 = 1$

$C_1 = 1 \cdot 1 = 1$

$C_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$C_3 =$
$1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot 1 = 1$
$2 \cdot 1 = 2$
$= 5$

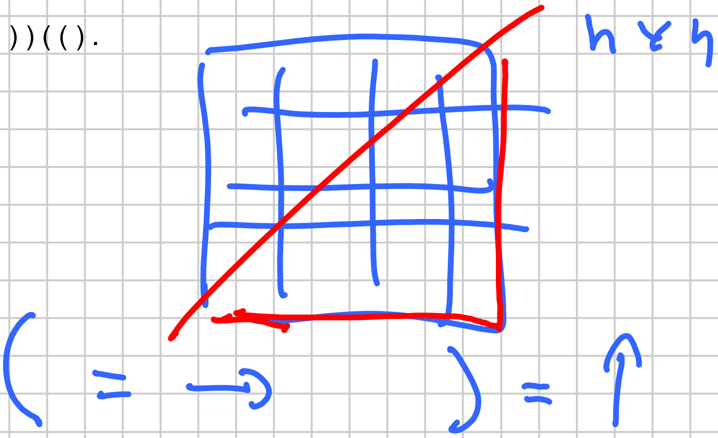
$C_4 =$
$1 \cdot 5 = 5$
$1 \cdot 2 = 2$
$2 \cdot 1 = 2$
$5 \cdot 1 = 5$
$= 14$

Le parentesi ben poste (problema di CATALAN)

Supponiamo di avere n coppie di parentesi e vogliamo scriverle in modo da formare un'espressione matematica corretta ad esempio con n=3

(( ) ( )) oppure ((( )))

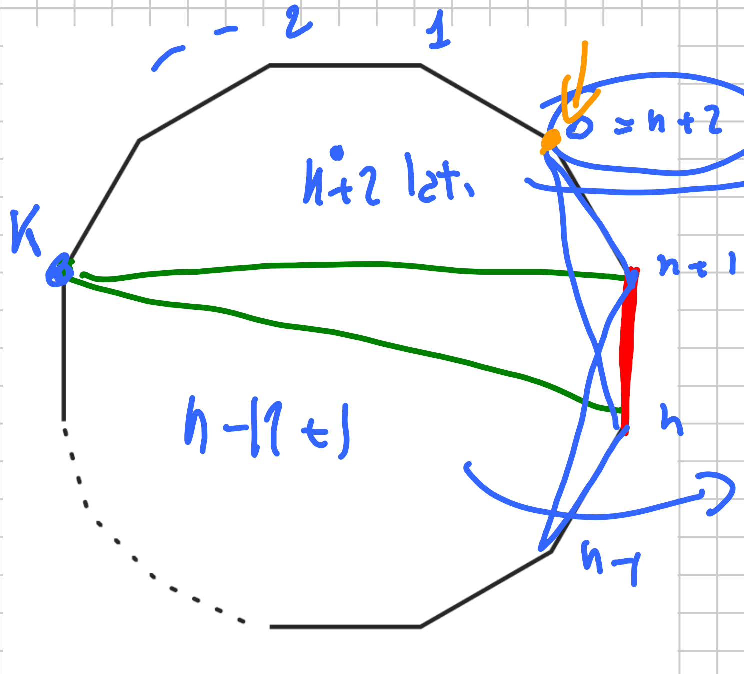
ma non ( )) (( ) .



$n = 0$:	*
$n = 1$:	()
$n = 2$:	()(), (())
$n = 3$:	()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))
$n = 4$:	()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((())))
$n = 5$:	()()()()(), ()()()(()), ()()(())(), ()()(()()), ()()((())), ()(())()(), ()(())(()), ()(()())(), ()((()))(), ()(()()()), ()(()(())), ()((())()), ()((()())), ()(((()))), (())()()(), (())()(()), (())(())(), (())(()()), (())((())), (()())()(), (()())(()), ((()))()(), ((()))(()), (()()())(), (()(()))(), ((())())(), ((()()))(), (((())))(), (()()()()), (()()(())), (()(())()), (()(()())), (()((()))), ((())()()), ((())(())), ((()())()), (((()))()), ((()()())), ((()(()))), (((())())), ((((())()))), (((()()))), ((((()))))

Triangolazione di un poligono (problema di EULERO)

$n+2$ angoli $\rightsquigarrow C_n$

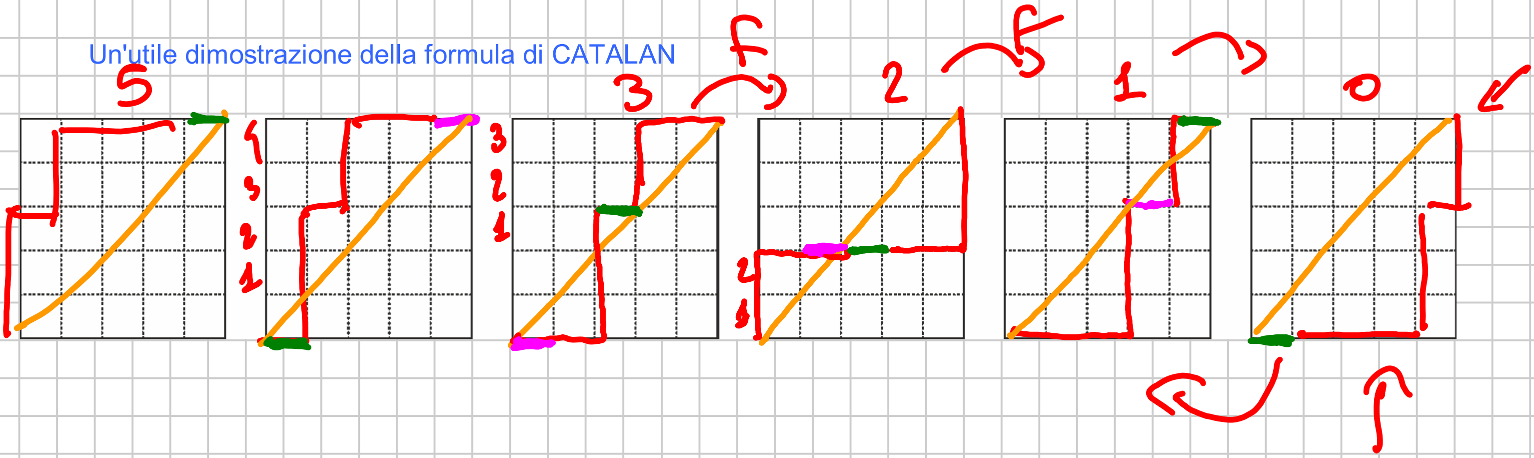


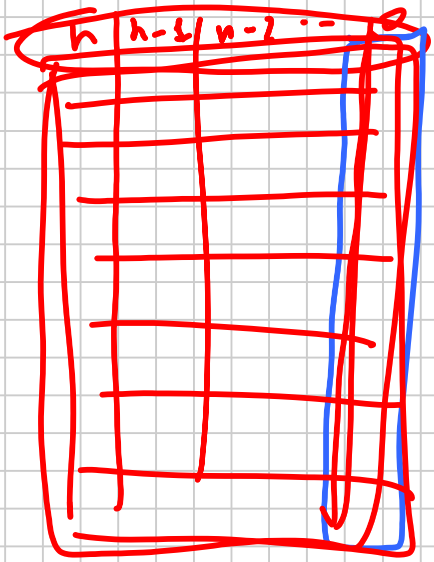
$\to C_k$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, C_{n-k-1}$$

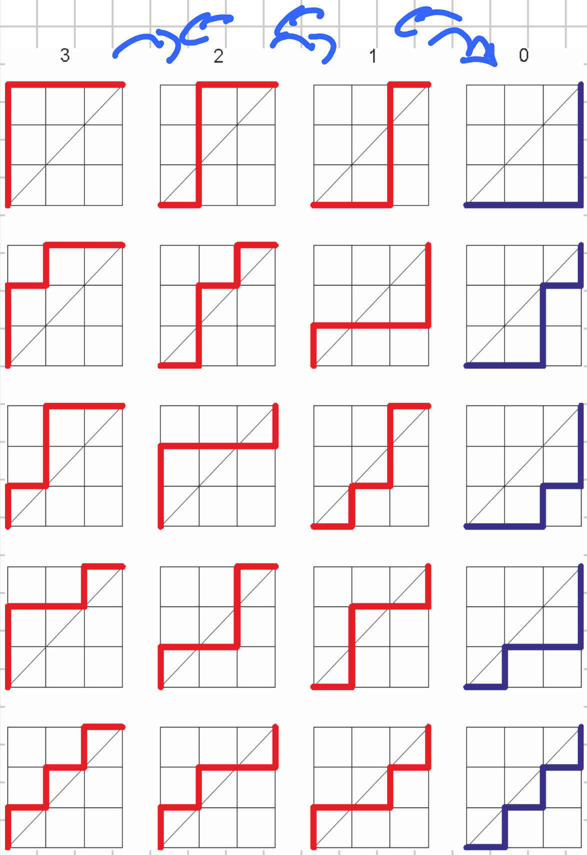
$\to C_{n-k-1}$

Un'utile dimostrazione della formula di CATALAN





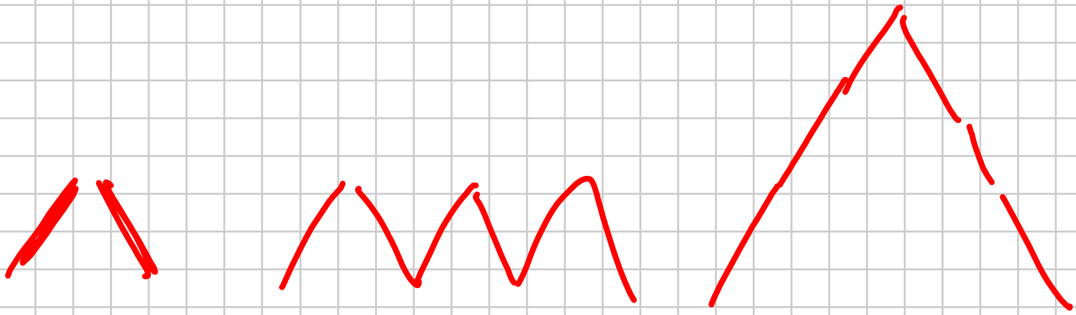
$$n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$



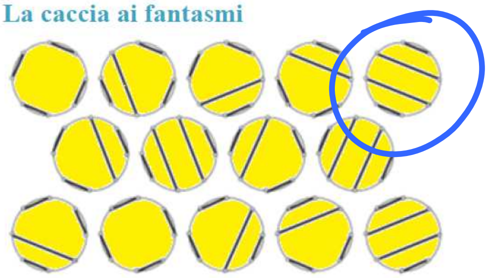
ESERCIZI: Parole di Dyck o Percorsi di Dyck

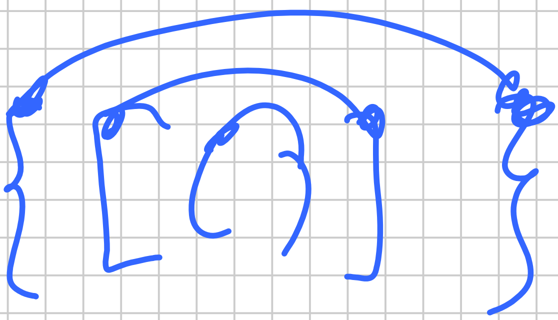
Una parola di Dyck è una stringa consistente di n simboli X ed n simboli Y tale che, preso comunque un segmento iniziale della stringa, esso non contenga più simboli Y che simboli X.

Un percorso di Dyck è un percorso che usa n tratti “/” ed n “\” che non scendono mai sotto alla linea di base.



18. La caccia ai fantasmi



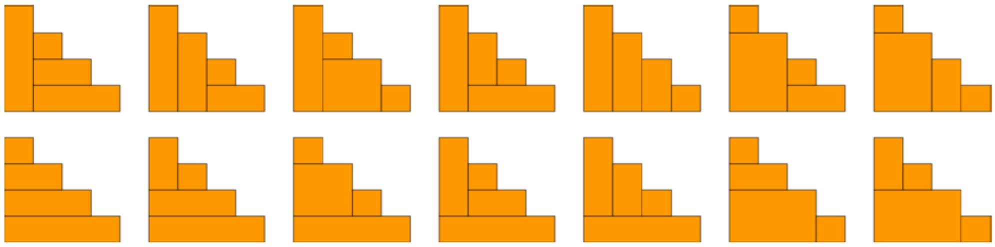


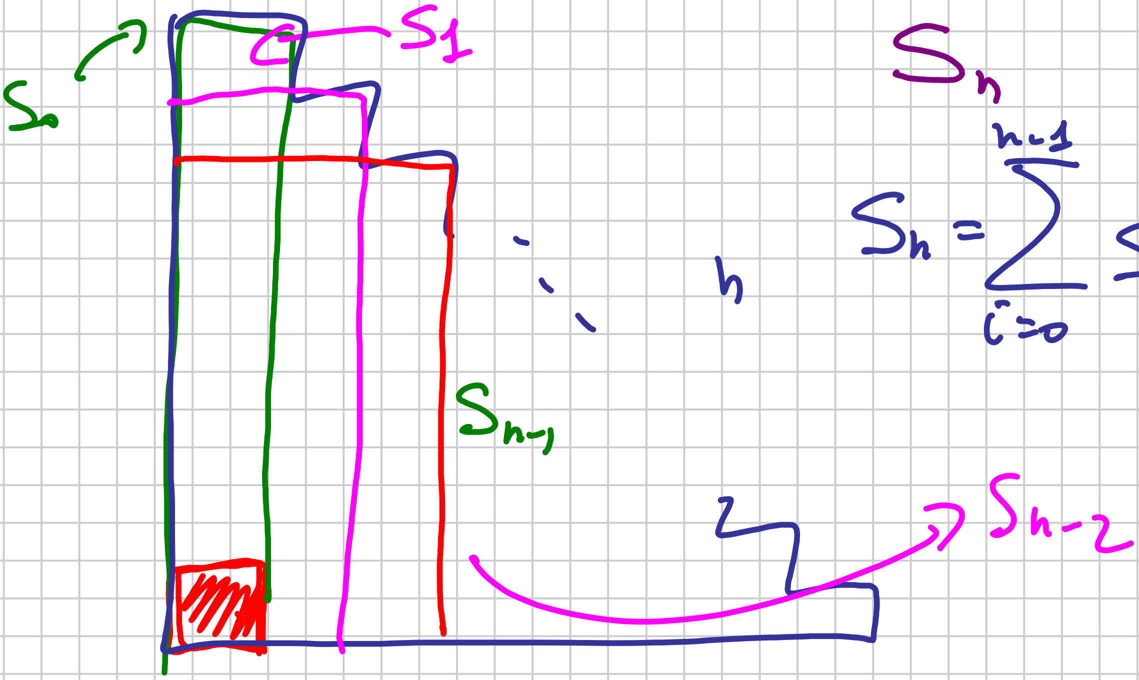
Ci sono N cacciatori, a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l’emissione di un raggio che si propaga in linea retta e termina la sua corsa toccando un fantasma. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi. Cacciatori e fantasmi sono collocati in 2N punti equidistanti su una circonferenza. Per N = 1,2,3,5, il numero di strategie vincenti, che riescono a eliminare tutti i fantasmi, è rispettivamente 1,2,5,42. Per N = 4, la figura illustra le 14 strategie vincenti.

Quante sono per N=7?

ESERCIZI: un mondo di scale

Qual è il numero di possibili tassellazioni di una scala di n gradini con n rettangoli.
Ad esempio, per n=4 si ottiene





S_n

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \, S_{n-1-i}$$

ESERCIZI: Partizioni non incrociate

Una partizione non incrociata di un insieme linearmente ordinato è una partizione nella quale gli elementi appartenenti a sottoinsiemi differenti non si “incrociano”, ovvero, se *a* e *b* appartengono a un sottoinsieme e *x* e *y* a un altro, non vi sono nell’insieme sottosequenze (composte anche da elementi non contigui) come *a x b y*.
Per esempio per un insieme di 4 elementi { A, B, C, D }:

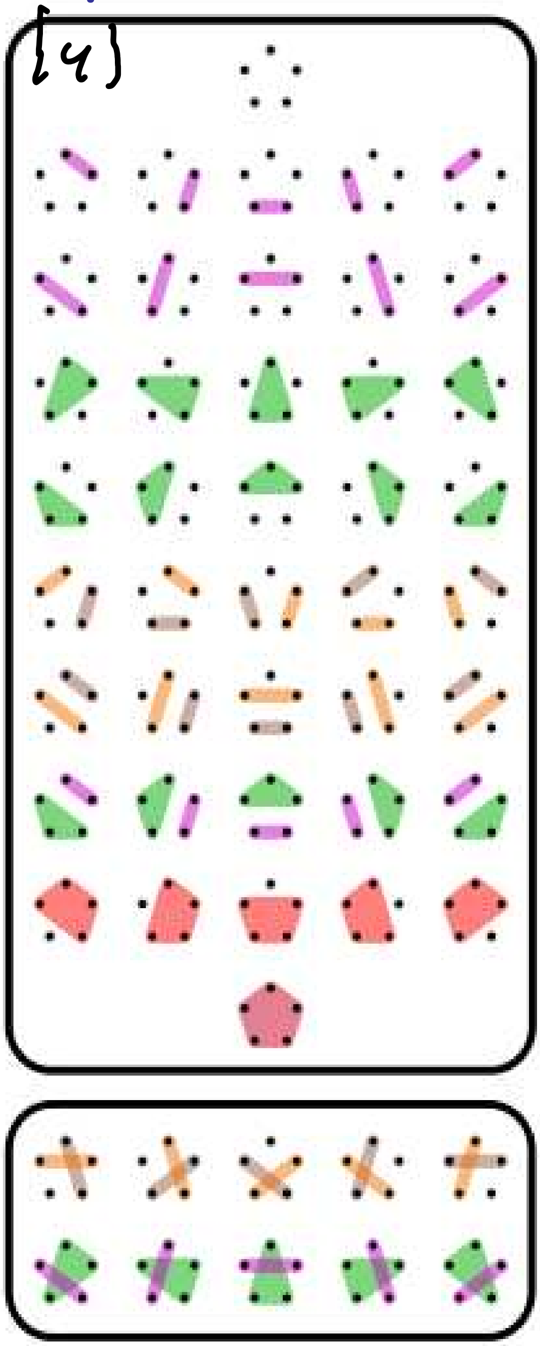
- { A, B, C, D }
- { A } { B, C, D }
- { A, C, D } { B }
- { A, B, D } { C }
- { A, B, C } { D }
- { A, B } { C, D }
- { A, D } { B, C }
- { A, B } { C } { D }
- { A, C } { B } { D }
- { A, D } { B } { C }
- { A } { B, C } { D }
- { A } { B, D } { C }
- { A } { C, D } { B }
- { A } { B } { C } { D }

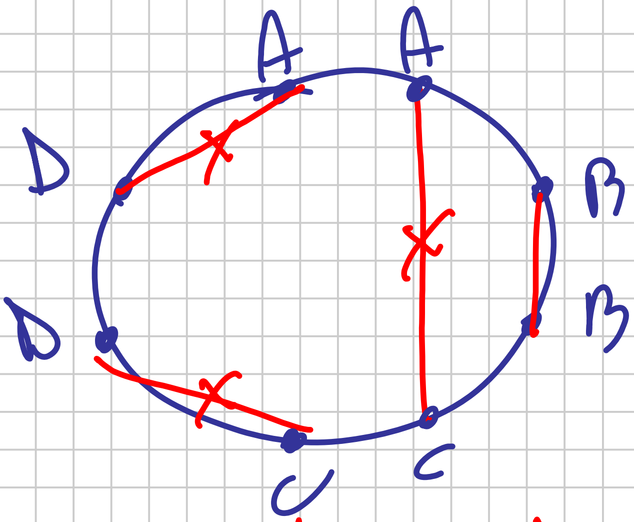
È esclusa la partizione { A, C } { B, D }, perché contiene un “incrocio”

Dato un insieme di n elementi, quante sono le partizioni non incrociate di quest

ab xy

ab {x} {y}





{A C D} {B}