Omotetia e inversione nei problemi olimpici

Rosanna Tupitti
Liceo Scientifico A. Einstein, Teramo
e-mail: rosannatupitti@gmail.com

Montecatini, 15-18 ottobre 2017

Sommario

Questo intervento è collegato a quello di Cetraro 2016. Ho voluto fare una panoramica sulle trasformazioni geometriche e il loro utilizzo nella risoluzione di problemi. L'anno scorso ho trattato traslazione, simmetria e rotazione, quest'anno omotetia e inversione.

1 Omotetia

Definizione. *Sia O un punto del piano e k un numero reale non nullo. Una* ***omotetia*** *è una trasformazione geometrica piana che manda il punto P nel punto P' tale che $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.*
O e k sono detti, rispettivamente, il ***centro*** *e il* ***rapporto*** *di omotetia.*
Essa si indica con $\mathbb{h}_O = \mathcal{H}(O, k)$.

Principali proprietà:

- $A'B'/AB = |k|$;
- $AB \parallel A'B'$;
- le *rette unite* di un'omotetia sono tutte e sole quelle passanti per il centro;
- se due triangoli non congruenti hanno i lati orientati tali che ciascun lato dell'uno è parallelo al corrispondente lato dell'altro allora esiste una omotetia che manda un triangolo nell'altro;
- un'omotetia trasforma cerchi in cerchi;
- la composizione di due omotetie con lo stesso centro e rapporti k_1 e k_2 è un'omotetia con lo stesso centro e di rapporto il prodotto $k_1 \cdot k_2$;
- la composizione di due omotetie con centri diversi e rapporti k_1 e k_2 con $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ è una omotetia con centro sulla retta passante per i due centri e rapporto $k_1 \cdot k_2$; se $k_1 \cdot k_2 = 1$ allora la composizione è una traslazione.

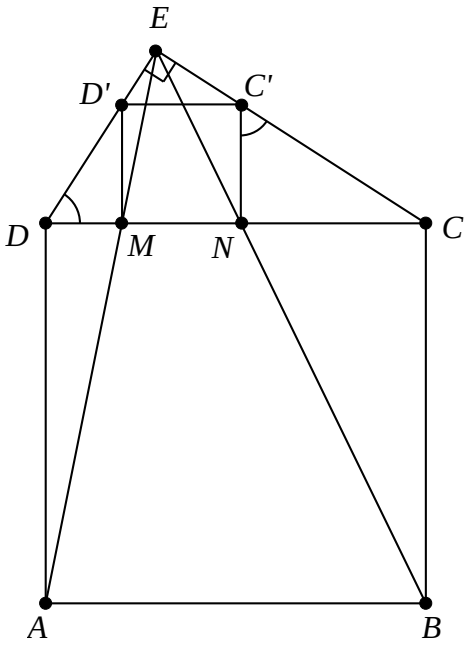
Problemi risolti

1. Esternamente al quadrato $ABCD$ costruire il triangolo $\triangle DCE$ retto in E. Indichiamo con M ed N i punti di intersezione di DC con AE e BE rispettivamente. Se $DM = 20$ e $NC = 45$ calcolare MN.

Soluzione.

- Consideriamo l'omotetia $\mathtt{h}_E$ di centro E tale che $A \to M$, $B \to N$, $C \to C'$, $D \to D'$ con $D' \in DE$ e $C' \in CE$;
- osserviamo che poichè un'omotetia manda quadrati in quadrati $D'MNC'$ è un quadrato di lato x;
- inoltre $\mathtt{h}_E$ trasforma segmenti conguenti in segmenti congruenti per cui $D'M = MN$. Pertanto $MNC'D'$ è un quadrato.
- essendo $\angle DEC = 90°$ e $\triangle DMD' \sim \triangle NCC'$, posto $MN = x$ abbiamo:

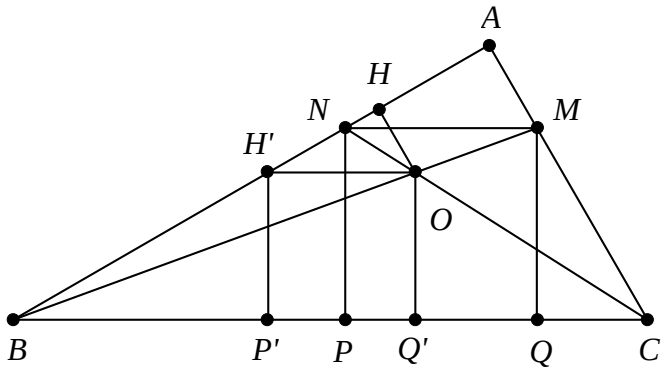
$$DM : NC' = MD' : NC \quad \Leftrightarrow$$
$$20 : x = x : 45 \quad \Leftrightarrow \quad x = 30$$



□

2. In un triangolo rettangolo $\triangle ABC$, con $\angle A = 90°$ e $\angle C = 60°$ inscrivere il quadrato $PQMN$ con $P, Q \in BC$, $M \in AC$ ed $N \in AB$. Sia $O = BM \cap CN$ tale che la distanza tra O e BC vale 10. Calcolare la distanza di O da AB.

Soluzione.

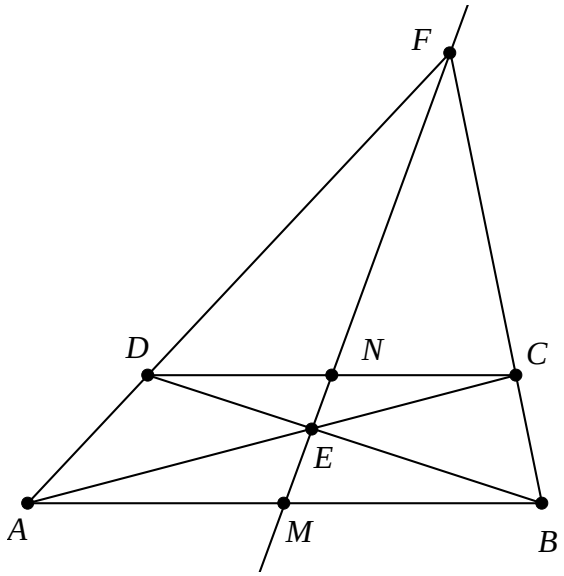


- L'omotetia h_B di centro B tale che $M \to O$, porta P in P' ed N in N' e, per le proprietà delle omotetie $P'Q'ON'$ è un quadrato;
- essendo $N'O \parallel BC$ abbiamo che $\angle ON'H = 30°$;
- poichè $N'O = OQ' = 10$ risulta che $HO = N'O/2 = 5$.

□

3. Provare che in ogni trapezio i punti medi delle basi, il punto d'intersezione delle diagonali e il punto d'intersezione dei due lati non paralleli sono allineati.

Soluzione.

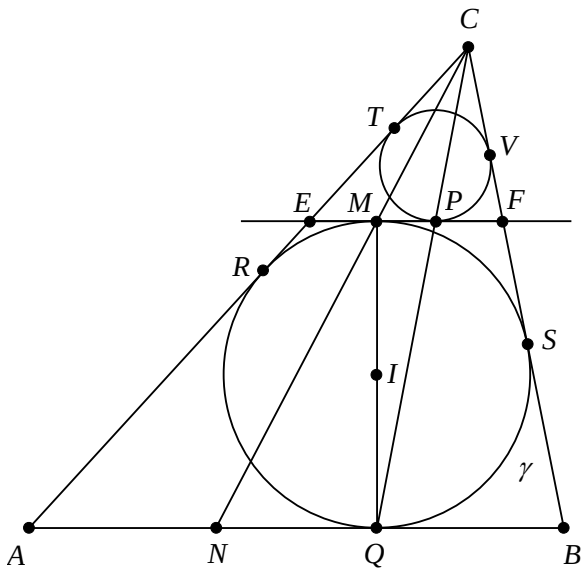


- L'omotetia h_F di centro F tale che $D \to A$, trasforma C in B (poichè le rette vengono trasformate in rette parallele) e trasforma il punto medio di DC nel punto medio di AB, per cui $N \to M$ e dunque $F \in NM$;
- dobbiamo ora provare che anche $E \in MN$: per fare ciò consideriamo l'omotetia h_E di centro E tale $A \to C$;
- h_E trasforma B in D ed M in N e ciò garantisce che $E \in NM$;
- pertanto F, N, E, M sono allineati.

□

4. In un triangolo $\triangle ABC$ è inscritta una circonferenza γ. Sia r la retta parallela ad AB e tangente a γ in M. La retta CM incontra AB in N. Se $AC = 9$, $BC = 7$ e $AB = 6$ calcolare AN.

Soluzione. Siano $E = AC \cap r$, $F = BC \cap r$; indichiamo con γ' la circonferenza inscritta in $\triangle EFC$ e siano $P = \gamma' \cap EF$, $T = \gamma' \cap EC$, $V = \gamma' \cap FC$, $R = \gamma \cap AC$, $S = \gamma \cap BC$, $Q = \gamma \cap AB$, $EM = a$, $MP = b$, $PF = c$, $TC = d$.



- Consideriamo l'omotetia $\mathtt{h}_C$ di centro C tale che $E \to A$, $F \to B$; per le proprietà delle omotetie $\mathtt{h}_C(\omega) = \gamma$ e dunque $T \to R$ e $V \to S$;
- poichè $CR = CS$ abbiamo:

$$a + a + b + d = d + c + c + +b \quad \Rightarrow \quad a = c \quad \Rightarrow \quad EM = PF$$

- poichè segmenti congruenti hanno come immagine segmenti congruenti abbiamo

$$AN = \mathtt{h}_C(EM) = \mathtt{h}_C(PF) = QB$$

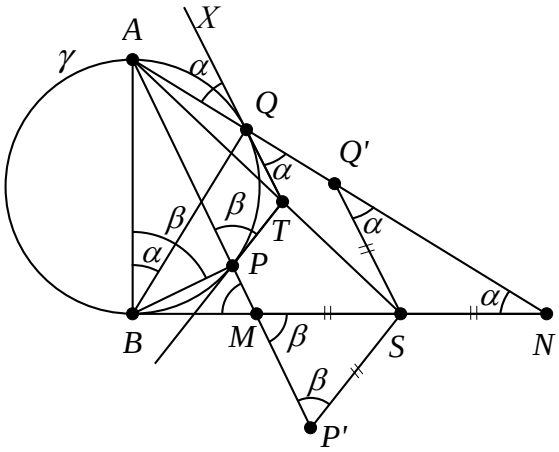
- dunque per valutare AN è sufficiente valutare QB. A tal fine posto $BQ = x$, $AQ = y$ e $CR = z$ abbiamo

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ y + z = 9 \\ x + z = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ AN = QB = x = 2$$

□

5. Sia γ una circonferenza di diametro AB, sia T un punto esterno a γ, siano TQ e TP i segmenti di tangenza e sia r la retta tangente a γ nel punto B. Detti M, S ed N i punti di intersezione della retta r con AP, AT e AQ rispettivamente, dimostrare che S è il punto medio del segmento MN.

Soluzione.



- Consideriamo l'omotetia $\mathtt{h}_A$ di centro A tale che $T \to S$;
- osserviamo che $Q \to Q'$ e $P \to P'$ con la proprietà che $SQ' \parallel TQ$ e $P'S \parallel PT$;
- essendo $TQ = TP$ abbiamo $SQ' = SP'$ (1)
- dalle proprietà delle omotetie e dei triangoli rettangoli abbiamo:

$$\angle P'MS = \angle PMB = \angle PBA = \angle TPA = \angle SP'M \quad \Rightarrow \quad MS = SP' \tag{2}$$

- analogamente abbiamo:

$$\angle Q'NS = \angle QBA = \angle XQA = \angle TQN = \angle SQ'N \quad \Rightarrow \quad SQ' = SN \tag{3}$$

- da (1), (2) e (3) deduciamo che: $MS = SP' = SQ' = SN$.

□

2 Inversione circolare

Definizione. *Data una circonferenza γ di centro O e raggio k si dice* ***inversione*** *la trasformazione geometrica piana che ad ogni punto $P \neq O$ associa il punto P' della semiretta OP tale che*

$$OP \cdot OP' = k^2$$

La circonferenza γ è chiamata circonferenza di inversione mentre O e k^2 sono rispettivamente il ***centro*** *e la* ***potenza*** *dell'inversione: essa è indicata con $\boldsymbol{I} = I(O, k^2)$.*

L'insieme di tutti i punti nei quali si trasformano i punti di una figura $\mathcal{F}$ per mezzo di un'inversione costituisce la figura $\mathcal{F}'$ detta *figura inversa* di $\mathcal{F}$.

2.1 Inversione in coordinate cartesiane.

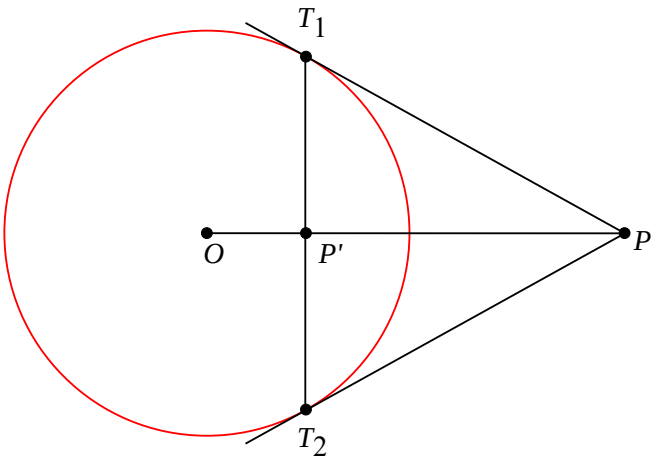
Siano x ed y cordinate nel piano messe in modo tale che il punto O coincida con l'origine del sistema di riferimento. Allora l'inversione $I(O, k^2)$ si può rappresentare nella forma $I(x, y) = (X, Y)$, dove:

$$\begin{cases} X = \dfrac{k^2 x}{x^2 + y^2} \\ \\ Y = \dfrac{k^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

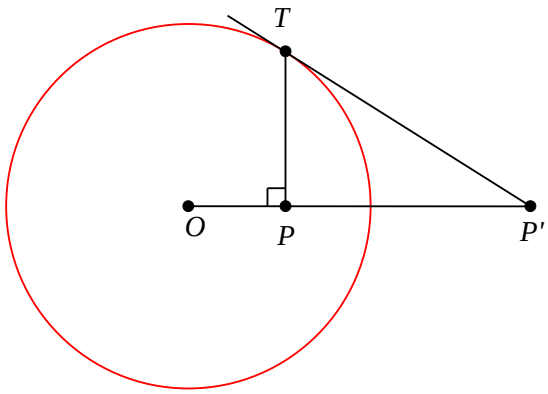
2.2 Proprietà dell'inversione.

Un'inversione $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}(O, k^2)$ di centro O e potenza k^2 soddisfa le seguenti proprietà:

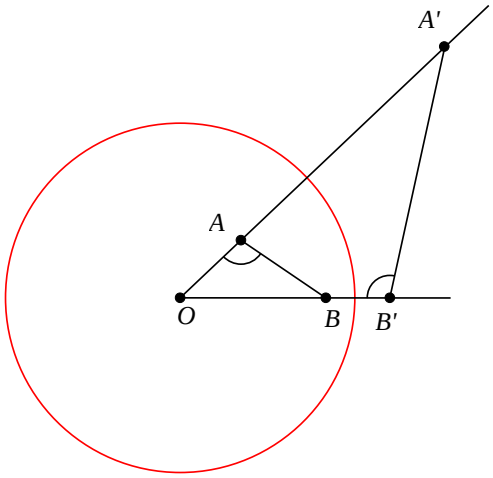
- $\boldsymbol{I}$ è una trasformazione involutoria, cioè $\boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{I}$ è l'identità;
- se P è un punto esterno a γ e T_1, T_2 sono i punti di contatto delle tangenti a γ condotte da P allora $P' = T_1T_2 \cap OP$;



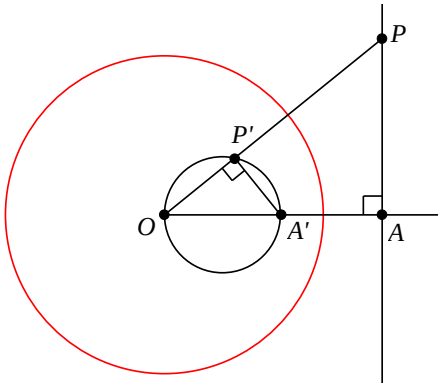
- se P è un punto interno a γ e T è uno dei punti di intersezione di γ con la perpendicolare a PO passante per P, allora la tangente a γ in T interseca PO in P';



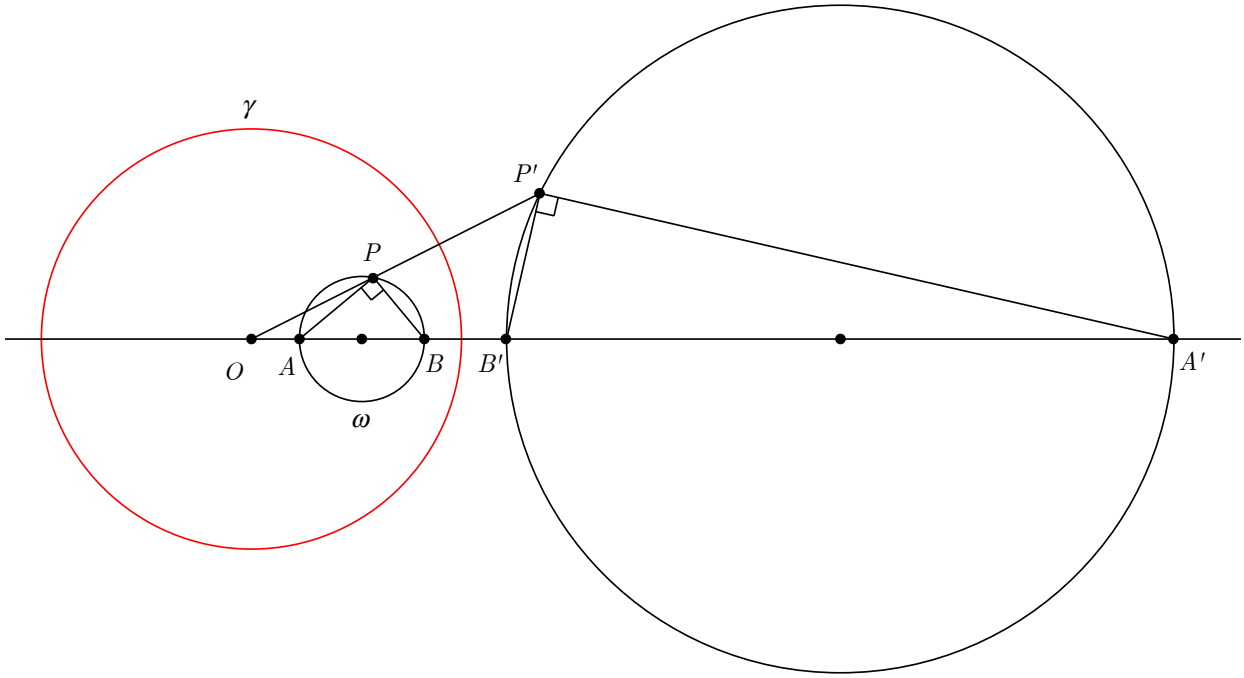
- $\boldsymbol{I}$ lascia fissi tutti i punti di γ;
- $\boldsymbol{I}$ lascia fisse le rette passanti per O;
- se $A' = \boldsymbol{I}(A)$ e $B' = \boldsymbol{I}(B)$ allora $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ ed il quadrilatero $ABB'A'$ è ciclico;



- $\boldsymbol{I} = I(O, k^2)$ trasforma una circonferenza di centro O e raggio r in una circonferenza di centro O e raggio $r' = k^2/r$;
- $\boldsymbol{I}$ trasforma ogni retta non passante per O in una circonferenza passante per O. Inoltre il suo diametro passante per O è perpendicolare alla retta data;



- $\boldsymbol{I}$ trasforma una circonferenza ω passante per O in una retta non passante per O. Inoltre questa retta è perpendicolare al diametro di ω passante per O;
- $\boldsymbol{I}$ trasforma una circonferenza ω non passante per O in una circonferenza non passante per O;



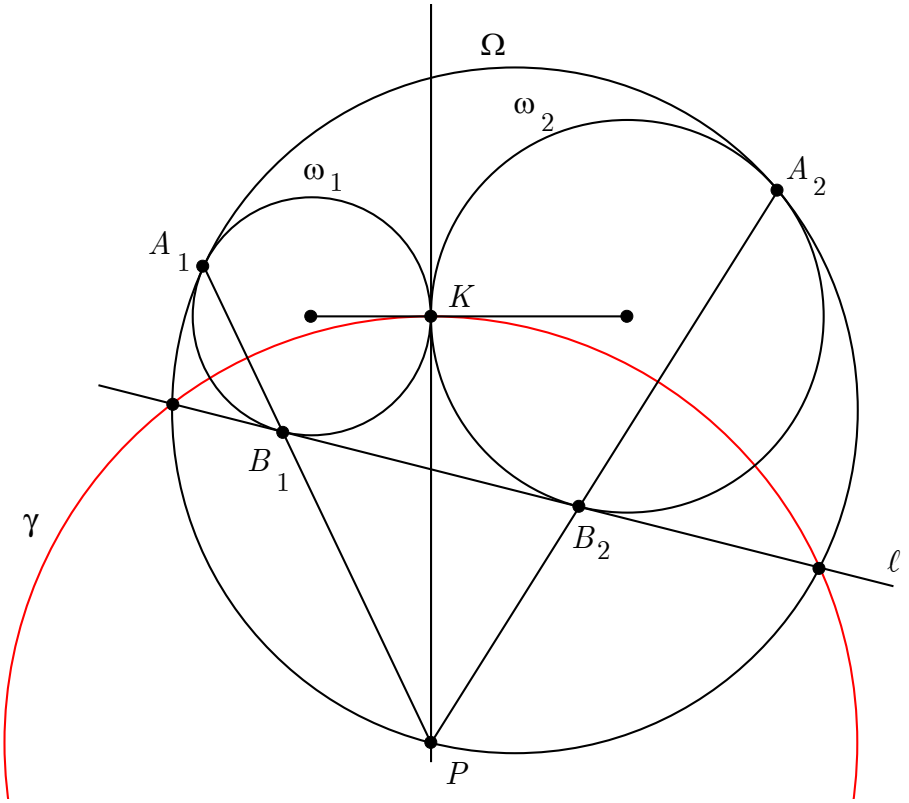
- $\boldsymbol{I}$ lascia fisse tutte le circonferenze ortogonali ad γ;
- se $A' = \boldsymbol{I}(A)$ e $B' = \boldsymbol{I}(B)$ allora
$$A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$$
- la trasformata di una circonferenza ω di raggio r è una circonferenza ω' di raggio r' tale che
$$r' = \frac{k^2}{\mathrm{Pow}(O, \omega)} \cdot r$$
dove $\mathrm{Pow}(O, \omega) = OC^2 - r^2$ è la potenza di O rispetto al cerchio ω di centro C;
- $\boldsymbol{I}$ è un'applicazione *conforme* (inversa), ossia conserva gli angoli tra due figure[1] ma ne cambia l'*orientazione*: se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ sono due figure (linee, circonferenze), allora
$$\angle(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \angle(\boldsymbol{I}(\mathcal{F}_1), \boldsymbol{I}(\mathcal{F}_2))$$

[1]Ricordiamo che per angolo formato da due curve in un punto comune si intende l'angolo formato dalle tangenti alle due curve in tale un punto.

Problemi risolti

1. Due cerchi ω_1 e ω_2 sono tangenti esternamente nel punto K; essi sono anche tangenti internamente a un cerchio Ω nei punti A_1 e A_2 rispettivamente. Sia P uno dei punti di intersezione di Ω con la tangente comune a ω_1 e ω_2 nel punto K. La retta PA_1 interseca ω_1 ulteriormente in B_1 e la retta PA_2 interseca ω_2 ulteriormente in B_2. Dimostrare che B_1B_2 è una tangente comune ad ω_1 e ω_2. **(British MO 1996)**

Soluzione.



Osservato che la retta PK è la tangente comune a ω_1 e ω_2 abbiamo

$$PK^2 = PB_1 \cdot PA_1 = PB_2 \cdot PA_2 \tag{1}$$

Pertanto consideriamo l'inversione $\boldsymbol{I} = I(P, PK^2)$

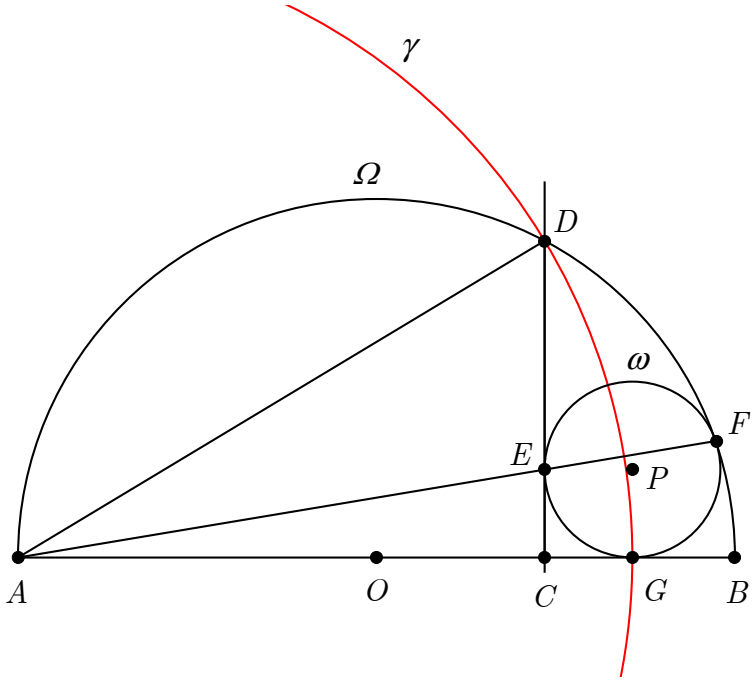
- le circonferenze ω_1 e ω_2 sono lasciate fisse da $\boldsymbol{I}$ essendo entrambe ortogonali alla circonferenza di inversione;
- $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$ per la (1);
- $\Omega \to \ell$ (retta passante per B_1 e B_2);
- dato che l'inversione conserva i punti di tangenza B_1 dovrà essere il punto di tangenza tra ω_1 ed ℓ in quanto A_1 è il punto di tangenza tra Ω ed ω_1; analogamente B_2 sarà il punto di tangenza tra ω_2 ed ℓ in quanto A_2 è il punto di tangenza tra Ω ed ω_2; dunque la retta B_1B_2 è la tangente comune ad ω_1 e ω_2.

□

2. Sia dato un semicerchio Ω di centro O e diametro AB e sia C un arbitrario punto del segmento OB. Sia D il punto del semicerchio tale che CD è perpendicolare ad AB. Un cerchio ω con centro P è tangente all'arco BD in F e ai segmenti CD, AB in E, G rispettivamente. Dimostrare che il triangolo ADG è isoscele.

(**Cesenatico 2003**)

Soluzione. Indichiamo con γ la circonferenza di centro A e raggio AD.



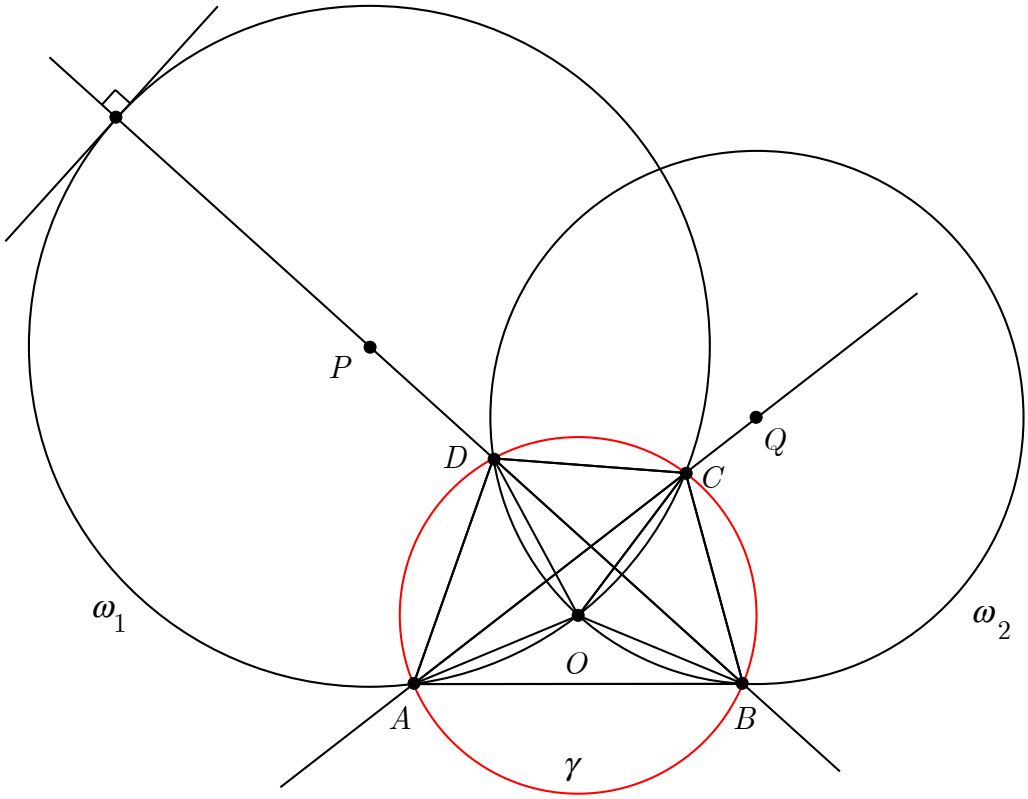
Considerata l'inversione $\boldsymbol{I} = I(A, AD^2)$ abbiamo

- $\boldsymbol{I}(AB) = AB$ perchè le rette per il centro di inversione restano fisse;
- $\boldsymbol{I}(B) = C$ per il primo teorema di Euclide, $\boldsymbol{I}(D) = D$ perchè $D \in \gamma$, quindi $\boldsymbol{I}(\Omega)$ è contenuta nella retta CD (in particolare l'arco BD ha per immagine il segmento CD e viceversa);
- la circonferenza ω è tangente a DC, ad AB e all'arco $\widehat{DB}$, dunque $\boldsymbol{I}(\omega)$ è tangente all'arco $\widehat{DB}$, alla retta AB e al segmento DC; ma una siffatta circonferenza è unica per cui $\boldsymbol{I}(\omega) = \omega$ (osserviamo, tra l'altro, che i punti A, E ed F sono allineati);
- valutiamo $\boldsymbol{I}(G)$: $\boldsymbol{I}(G) \in AB$ ed $\boldsymbol{I}(G) \in \omega$ per cui $\boldsymbol{I}(G)$ coincide con G;
- essendo G un punto fisso $G \in \gamma$ ossia $AG = AD$.

□

3. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di centro O. Le diagonali AC e BD non passano per O. Se il centro P della circonferenza ω_1 circoscritta ad $\triangle AOC$ giace sulla retta BD, dimostrare che il centro Q della circonferenza ω_2 circoscritta a $\triangle BOD$ giace sulla retta AC.

Soluzione.



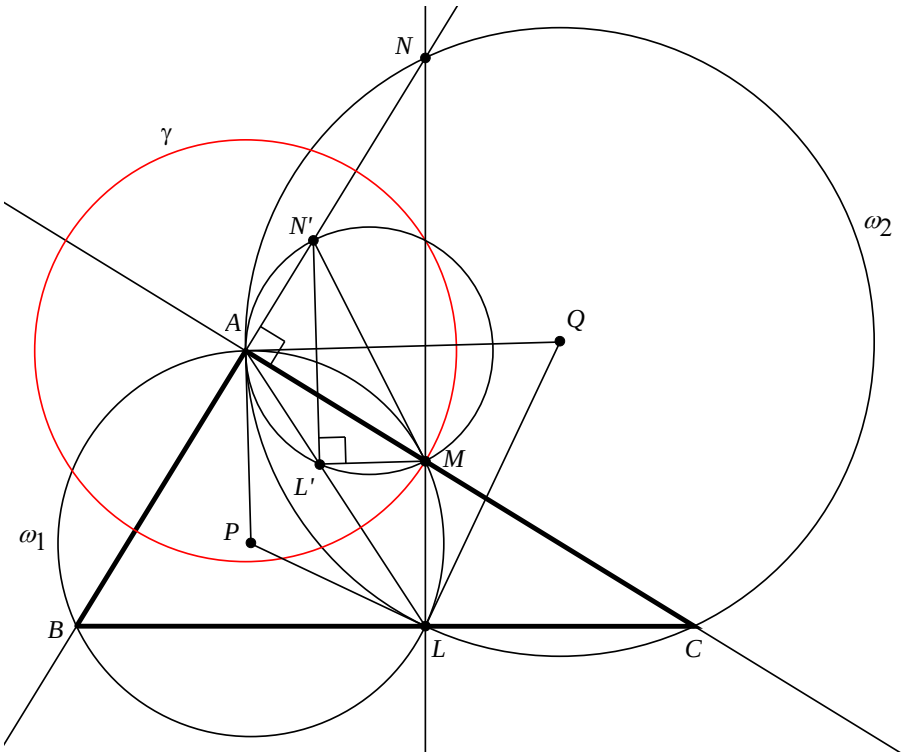
Consideriamo l'inversione $\boldsymbol{I} = I(O, OA^2)$.

- $\boldsymbol{I}$ trasforma la circonferenza ω_1 nella retta AC e la retta BD nella circonferenza ω_2;
- osserviamo che la retta BD e la circonferenza ω_1 sono ortogonali (una retta è ortogonale a una circonferenza se e solo se passa per il suo centro), per cui lo sono anche le rispettive immagini;
- pertanto essendo ortogonali AC ed ω_2 abbiamo che $Q \in AC$.

□

4. Sia ABC un triangolo con $\angle BAC = 90°$ e sia L un punto del segmento BC. Le circonferenze $\omega_1 = \odot(ABL)$, $\omega_2 = \odot(CAL)$ intersecano le rette AC, AB in M ed N rispettivamente (oltre che in A). Dimostrare che i punti L, M ed N sono allineati. (**British MO 2010**)

Soluzione.



- Indichiamo con P e Q i centri di ω_1 e ω_2 rispettivamente.
- Le circonferenze ω_1 e ω_2 sono ortogonali: infatti dato che $\triangle ABC$ è rettangolo in A

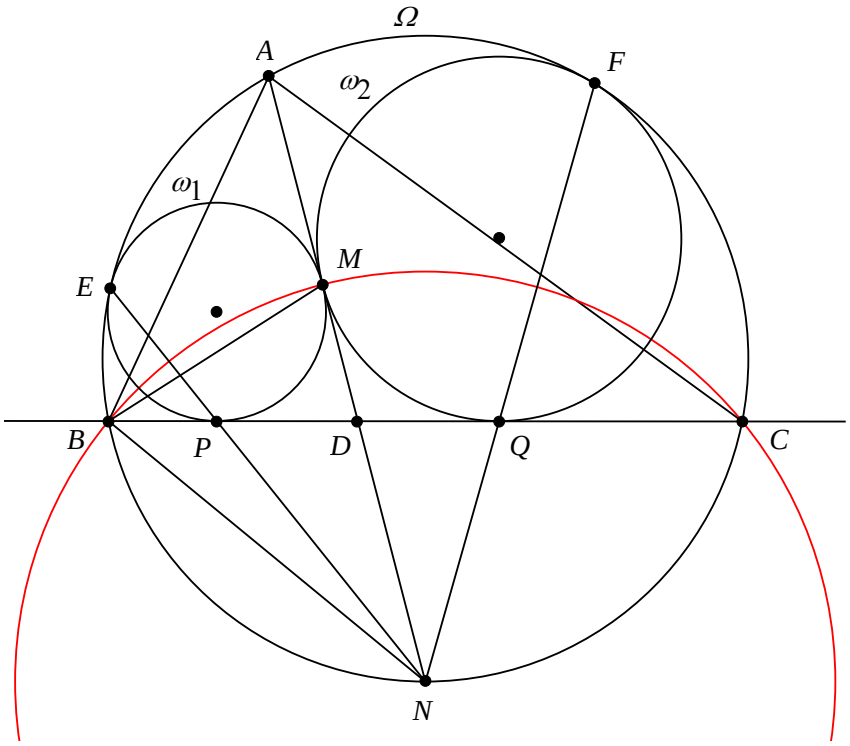
$$\begin{aligned}\angle PAQ = \angle PAL + \angle LAQ &= 90° - \frac{\angle LPA}{2} + 90° - \frac{\angle AQL}{2} \\ &= 90° - \angle CBA + 90° - \angle ACB = 90°\end{aligned}$$

  da cui segue $AP \perp AQ$ e ciò garantisce l'ortogonalità delle due circonferenze.
- per provare che L, M ed N sono allineati basta trovare un'inversione che porta tali punti su una circonferenza passante per il suo centro; a tal fine scegliamo l'inversione $\boldsymbol{I} = I(A, AM^2)$ (in realtà il raggio può essere scelto a piacere).
- osserviamo che $\boldsymbol{I}(M) = M$ e poniamo $\boldsymbol{I}(L) = L'$, $\boldsymbol{I}(N) = N'$. Poichè $A \in \omega_1$ si ha che $\boldsymbol{I}(\omega_1)$ è una retta, e sapendo che $M, L \in \omega_1$ possiamo dedurre che $\boldsymbol{I}(\omega_1) = ML'$. Analogamente $\boldsymbol{I}(\omega_2) = L'N'$.
- poichè l'inversione conserva gli angoli e ω_1 è ortogonale ad ω_2 possiamo dedurre che $L'M \perp L'N'$, quindi $\angle ML'N' = 90°$. Dato che ovviamente $\angle MAN' = 90°$ i punti L', M, N', A sono conciclici.
- in conclusione L', M, N' giacciono su una circonferenza passante per A (centro di inversione) e ciò prova l'allineamento di L, M, N.

□

5. Sia $\triangle ABC$ un triangolo e $D \in BC$. Le circonferenze ω_1 e ω_2 sono tangenti esternamente ad AD nel medesimo punto M e ciascuna di esse è tangente alla circonferenza Ω circoscritta ad $\triangle ABC$ e al lato BC, la prima, nel punto P, sopra al segmento BD e l'altra, nel punto Q, sopra al segmento DC. Dimostrare che M è l'incentro del triangolo $\triangle ABC$. (**Romania MO 1997**)

Soluzione.



- Indichiamo con N il punto medio dell'arco BC che non contiene A e consideriamo l'inversione $\boldsymbol{I} = I(N, NB^2)$: osserviamo che $\boldsymbol{I}(\Omega) = BC$ e viceversa; inoltre poichè punti di tangenza si trasformano in punti di tangenza, si ha $\boldsymbol{I}(E) = P$ e $\boldsymbol{I}(P) = E$; analogamente $\boldsymbol{I}(Q) = F$ e $\boldsymbol{I}(F) = Q$. Possiamo quindi dire che

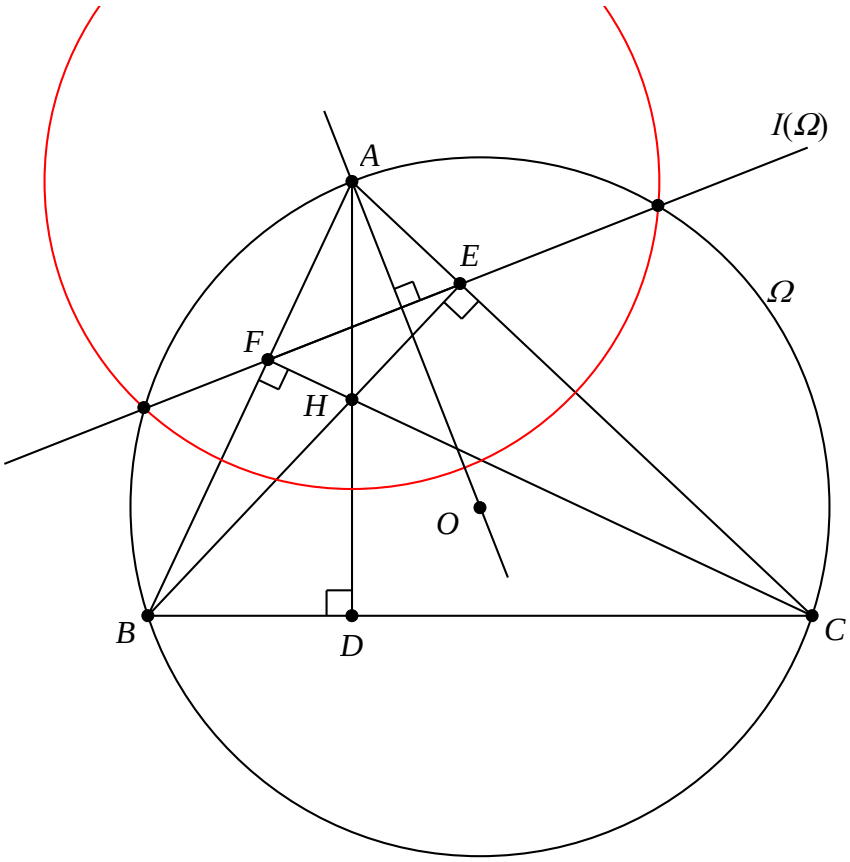
$$NP \cdot NE = NQ \cdot NF = NB^2$$

- $\boldsymbol{I}(\omega_1)$ è una circonferenza tangente a BC in P e ad Ω in E: una siffatta circonferenza è univocamente determinata per cui $\boldsymbol{I}(\omega_1) = \omega_1$; analogamente $\boldsymbol{I}(\omega_2) = \omega_2$;
- poichè il punto di tangenza di due circonferenze fisse non può che essere lasciato fisso abbiamo $\boldsymbol{I}(M) = M$, ossia $NM^2 = NB^2$;
- deduciamo allora che $NM^2 = NP \cdot NE = NQ \cdot NF$; ciò prova che N appartiene ad AM, tangente comune alle due circonferenze ω_1 e ω_2; dunque AM, passando per il punto medio dell'arco BC è bisettrice dell'angolo $\angle BAC$;
- per dimostrare che M è l'incentro del triangolo $\triangle ABC$ basta provare che BM è la bisettrice dell'angolo $\angle CBA$: posto $\alpha = \angle CBN$, $\beta = \angle CBM$ risulta $\angle BMN = \alpha + \beta$ e $\angle BAN = \alpha$; per il teorema dell'angolo esterno deve essere $\angle ABM = \beta$ da cui segue che $\angle CBM = \angle MBA$, quindi BM è la bisettrice dell'angolo $\angle CBA$.

□

6. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che le perpendicolari condotte da A, B, C rispettivamente su EF, FD, DE sono concorrenti.

Soluzione. Indichiamo con O ed H il circocentro e l'ortocentro di $\triangle ABC$ rispettivamente e con Ω la circonferenza circoscritta.



Per provare la tesi è sufficiente dimostrare che $AO \perp EF$.

- Osserviamo che $BDHF$ e $DCEH$ sono quadrilateri ciclici per cui:

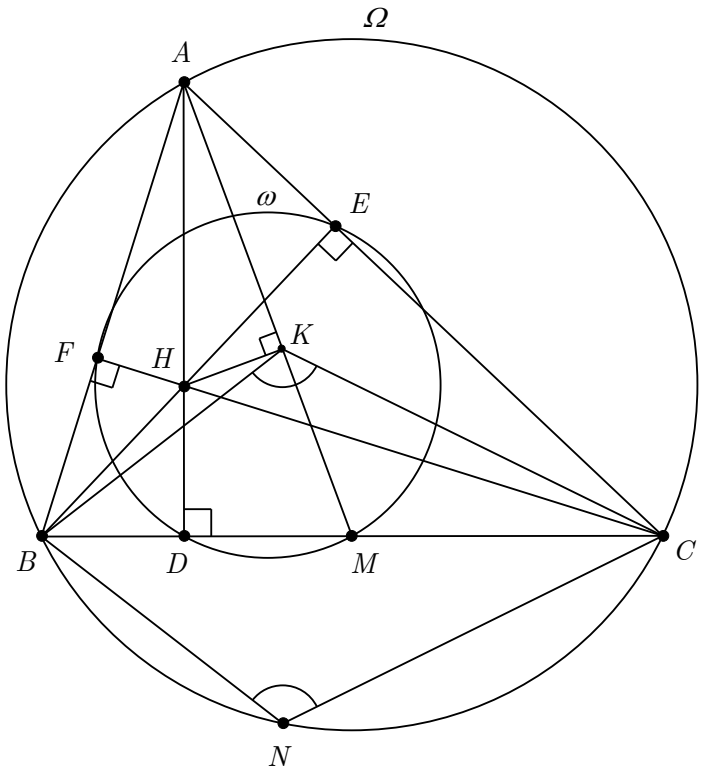
$$AB \cdot AF = AH \cdot AD = AC \cdot AE$$

- se consideriamo l'inversione $\boldsymbol{I} = I(A, AH \cdot AD)$ si ha: $\boldsymbol{I}(B) = F$, $\boldsymbol{I}(C) = E$ ed $\boldsymbol{I}(AO) = AO$; poichè $A \in \Omega$ ne segue che $\boldsymbol{I}(\Omega)$ è una retta, per cui $\boldsymbol{I}(\Omega) = FE$;
- osservato che la circonferenza Ω è ortogonale alla retta AO abbiamo che $\boldsymbol{I}(\Omega)$ è ortogonale a $\boldsymbol{I}(AO)$ cioè $FE \perp AO$, in quanto l'inversione conserva gli angoli;
- in modo analogo si prova che $BO \perp FD$ e $CO \perp DE$ e ciò garantisce che EF, FD, DE sono concorrenti in O.

□

7. In un triangolo $\triangle ABC$, sia H l'ortocentro, sia M il punto medio di BC e sia K la proiezione ortogonale di H su AM. Se N è il simmetrico di K rispetto a BC, dimostrare che N giace sulla circonferenza Ω circoscritta ad $\triangle ABC$.

Soluzione.



- Essendo N il simmetrico di K rispetto a BC abbiamo $\angle CNB = \angle BKC$ quindi per provare la tesi basta dimostrare che $\angle BKC$ è supplementare di $\alpha = \angle BAC$.
- Per fare questo usiamo le seguenti considerazioni:
  (1) $AFHE$ è ciclico $\Rightarrow$ $\angle EHF$ è supplementare di α;
  (2) $FBDH$ è ciclico $\Rightarrow$ $AF \cdot AB = AH \cdot AD$;
  (3) $HDCE$ è ciclico $\Rightarrow$ $AE \cdot AC = AH \cdot AD$;
  (4) $HDMK$ è ciclico $\Rightarrow$ $AK \cdot AM = AH \cdot AD$;
- se consideriamo l'inversione $\boldsymbol{I} = I(A, AH \cdot AD)$ abbiamo: $F \to B$, $D \to H$, $M \to K$, $E \to C$; inoltre $\boldsymbol{I}$ trasforma la circonferenza ω dei nove punti (che passa per F, D, M, E) nella circonferenza $\boldsymbol{I}(\omega)$ che passa per B, H, K, C;
- essendo B, H, K, C conciclici deduciamo che $\angle BKC = \angle BHC$;
- in conclusione

$$\angle CNB = \angle BKC = \angle BHC = \angle EHF = 180^\circ - \alpha$$

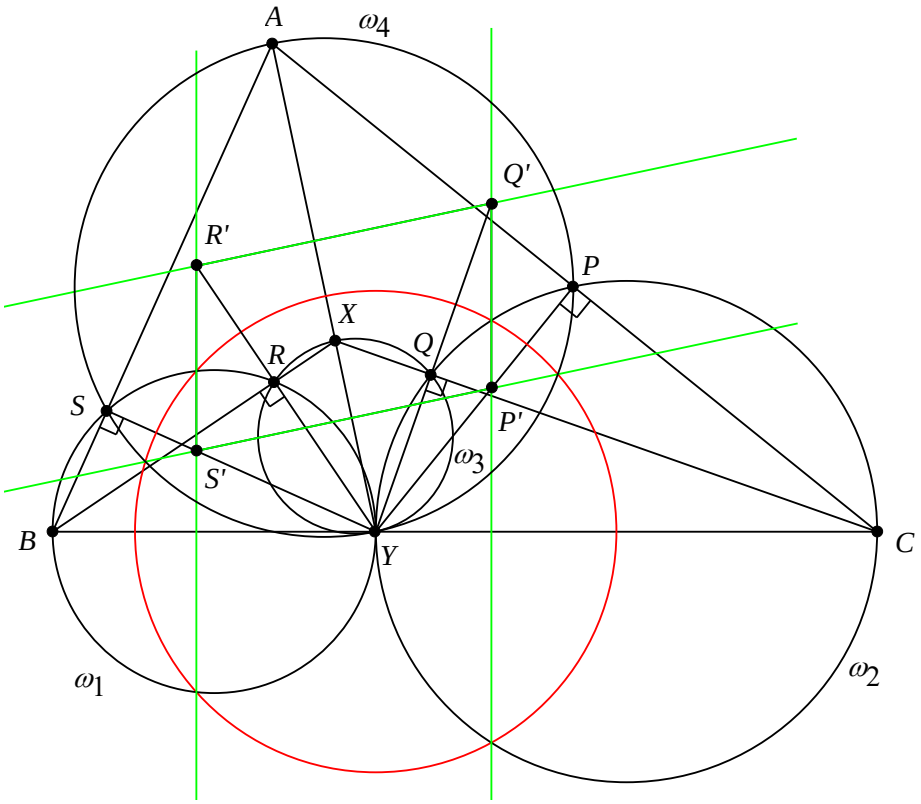
per cui $\angle CNB$ è supplementare di $\angle BAC$ e ciò garantisce che $N \in \Omega$.

□

8. Sia X un punto interno al triangolo $\triangle ABC$ e sia $Y = AX \cap BC$. Tracciamo le perpendicolari YP, YQ, YR, YS alle rette CA, CX, BX, BA rispettivamente. Trovare la condizione necessaria e sufficiente che deve soddisfare X affinchè $PQRS$ sia un quadrilatero ciclico.

(**Iran MO 2004**)

Soluzione. Indichiamo con ω_1 la circonferenza di diametro BY, con ω_2 quella di diametro YC. Osservato che $RYQX$ ed $SYPA$ sono quadrilateri ciclici, denotiamo con ω_3 e ω_4 le rispettive circonferenze circoscritte.



- Considerata un'inversione $\boldsymbol{I}$ di centro Y e potenza k^2 poniamo $\boldsymbol{I}(P) = P'$, $\boldsymbol{I}(Q) = Q'$, $\boldsymbol{I}(R) = R'$, $\boldsymbol{I}(S) = S'$ e osserviamo che $\boldsymbol{I}(BC) = BC$;
- poichè $\boldsymbol{I}(\omega_1)$ e $\boldsymbol{I}(\omega_2)$ sono ortogonali a BC anche $\boldsymbol{I}(\omega_1) = S'R'$, $\boldsymbol{I}(\omega_2) = P'Q'$ sono ortogonali a BC e quindi parallele tra loro;
- analogamente $\boldsymbol{I}(\omega_3) = R'Q'$ e $\boldsymbol{I}(\omega_4) = S'P'$ sono rette ortogonali ad AY e dunque parallele tra loro;
- $\therefore$ $P'Q'R'S'$ è un parallelogramma che è ciclico se e solo se è un rettangolo;
- poichè l'inversione conserva gli angoli abbiamo che $\angle P'S'R'$ è uguale all'angolo formato dalle circonferenze ω_1 e ω_4; pertanto le due circonferenze sono ortogonali se e solo se $AY \perp BC$;
- in conclusione $PQRS$ è ciclico $\Leftrightarrow$ $P'Q'R'S'$ è ciclico $\Leftrightarrow \angle P'S'R' = 90° \Leftrightarrow AY \perp BC$.

Osservazione. Se la circonferenza circoscritta a $P'Q'R'S'$ passa per Y si ha un caso degenere e i punti P, Q, R, S sono allineati. □

Problemi proposti

1. La circonferenza passante per i punti medi dei lati di un triangolo $\triangle ABC$ passa anche per i piedi delle altezze e per i punti medi dei segmenti che uniscono l'ortocentro ai vertici. Tale circonferenza si chiama *circonferenza dei nove punti* e il suo centro è indicato con N. Provare che:

(a) i punti O (circocentro) , G (baricentro) , H (ortocentro) sono allineati (*retta di Eulero*);

(b) N è il punto medio di OH;

(c) il raggio della circonferenza dei nove punti è $R/2$, avendo indicato con R il raggio della circonferenza circoscritta ad $\triangle ABC$.

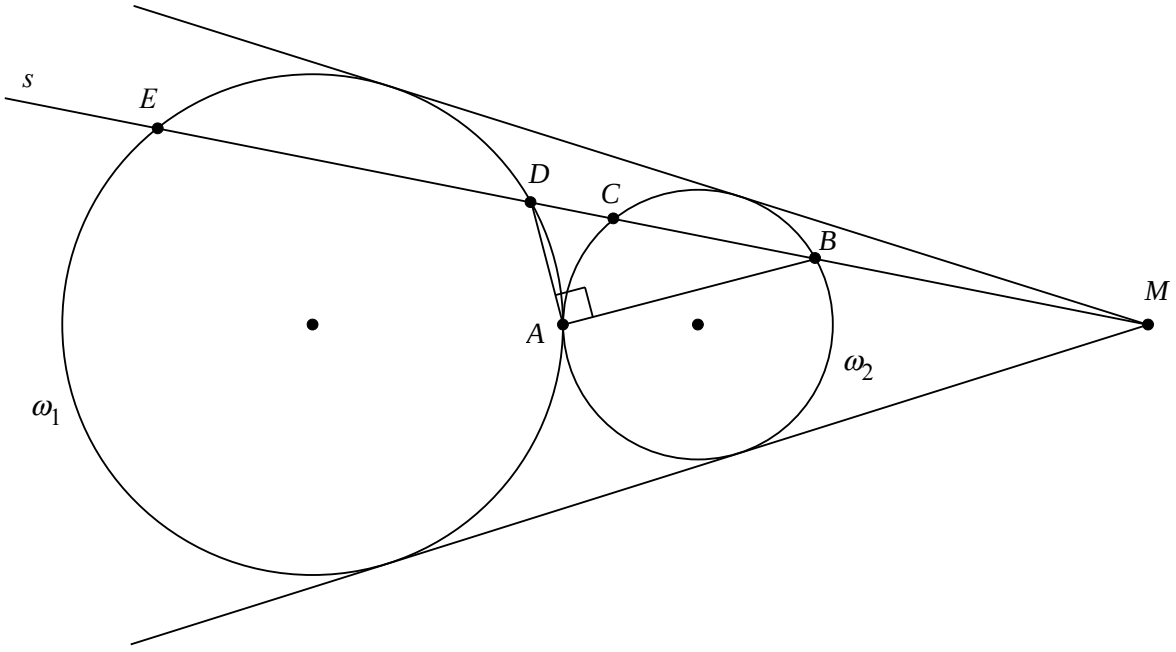
2. Inscrivere un quadrato in un triangolo.

3. Nel triangolo $\triangle ABC$ siano A', B', C' i punti medi dei lati BC, CA, AB rispettivamente. Sia I l'incentro di ABC, sia G il suo baricentro ed S (*centro di Spieker*) il centro della circonferenza inscritta nel triangolo mediale $\triangle A'B'C'$. Dimostrare che S, G, I sono allineati e $IG = 2 \cdot GS$.

4. Due circonferenze sono tangenti internamente nel punto A. La corda MN della circonferenza più grande è tangente alla circonferenza più piccola nel punto P. Provare che la retta AP è la bisettrice dell'angolo $\angle MAN$.

5. Sia $ABCD$ un trapezio con $AB \parallel DC$, sia M il punto medio di DC e sia P un punto sulla retta BC. Sia $X = AP \cap DC$, $Q = PM \cap BD$ e $Y = AQ \cap DC$. Dimostrare che M è il punto medio di XY.

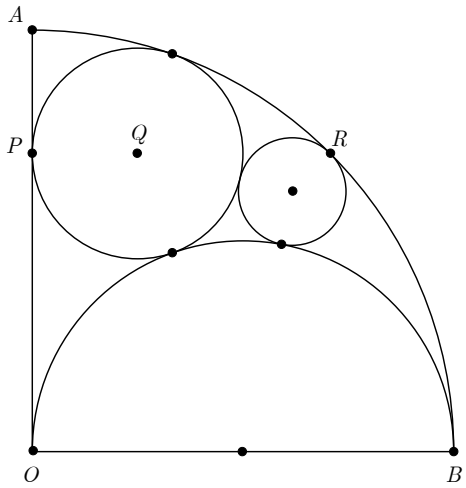
6. Siano ω_1 e ω_2 due circonferenze tangenti esternamente nel punto A. Sia M il punto di intersezione delle due tangenti esterne. Siano B, C, D, E i punti di intersezione di ω_1 e ω_2 con una semiretta s passante per M (come indicato in figura). Provare che $\angle BAD = 90°$,



7. Sia ABC un triangolo rettangolo ($\angle ACB = \frac{\pi}{2}$). Sia H la proiezione di C su AB. Un cerchio di centro C passante per H interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in E ed F. Dimostrare che EF biseca il segmento CH.

8. Sia AB un diametro del cerchio Ω. Per un punto $C \in \Omega$, $C \neq A$, $C \neq B$ denotiamo con D la sua proiezione su AB. Sia ω la circonferenza tangente ad AD, CD e Ω e siano $X = \Omega \cap \omega$ e $R = AD \cap \omega$. Dimostrare che $BA \cdot BD = BR^2$.

9. Dimostrare che i punti P, Q, R della seguente figura sono allineati.



10. Sia I l'incentro di ABC ($AB < BC$), sia M il punto medio di AC, sia N il punto medio dell'arco AC della circonferenza circoscritta, che contiene B. Dimostrare che $\angle IMA = \angle INB$.

11. (Teorema di Tolomeo) Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Dimostrare che

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

12. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB rispettivamente. Uno dei punti di intersezione tra EF e la circonferenza circoscritta ad $\triangle ABC$ è P. Se $Q = DF \cap BP$ dimostrare che $AP = AQ$. (**British MO FST 2011**)

13. Siano k e k' due circonferenze concentriche di centro O e raggi rispettivamente R ed R' (con $R < R'$). Una semiretta Ox interseca k nel punto A; la semiretta opposta Ox' interseca k' nel punto B. Una terza semiretta Ot, distinta dalle precedenti, interseca k in E e k' in F. Dimostrare che le quattro circonferenze seguenti passano per un stesso punto:

(1) la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle OAE$;

(2) la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle OBF$;

(3) la circonferenza di diametro EF;

(4) la circonferenza di diametro AB. (**Mediterranean MC 2005**)

14. (Teorema delle sette circonferenze). Le circonferenze ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 sono tangenti a una circonferenza ω nei punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 rispettivamente e ciascuna di esse è anche tangente alla precedente e alla seguente (intendiamo che ω_1 è la seguente di ω_6 e che ω_6 è la precedente di ω_1). Dimostrare che le rette A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 sono concorrenti.

Riferimenti bibliografici

[1] Massimo Gobbino, *Schede olimpiche*,
U.M.I, Bologna (2010)

[2] Italo D'Ignazio, Ercole Suppa *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*,
Interlinea Editrice (2001)

[3] Arkadii Slinko, *Transformations in the solutions of geometric problems*
`http://www.mathsolympiad.org.nz/category/notes/geometry/`

[4] Bobby Poon, *Geometry Transformations*,
IMOHK Training 2006

[5] Clayton W. Dodge, *Euclidean Geometry and Transformations*,
Dover Publications, New York 2004

[6] I.M. Yaglom, *Geometric Transformations IV*,
Anneli Lax New Mathematical Library MAA, 2009

[7] F.J.G. Capitan, *Inversión en Olimpiadas*,
`http:www.oei.es/historico/oim/numero27/probinv.pdf`

[8] Dušan Djukić, *Inversion*,
`http://imomath.com/index.php?options323=`