

Omotetia e inversione nei problemi olimpici

Rosanna Tupitti

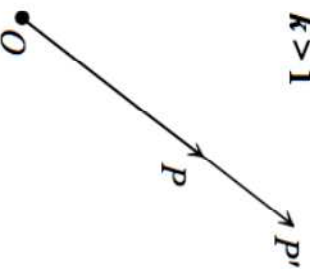
Liceo Scientifico A. Einstein, Teramo
e-mail: rosannatupitti@gmail.com
web: <http://www.rotupitti.it/>

Incontri olimpici
Montecatini, 15-18 ottobre 2017

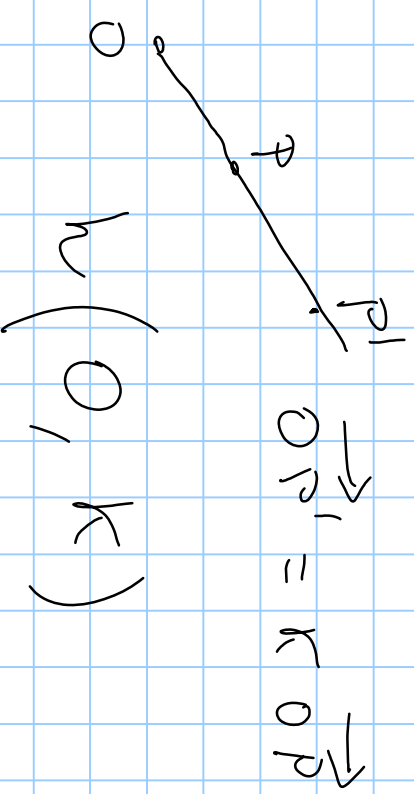
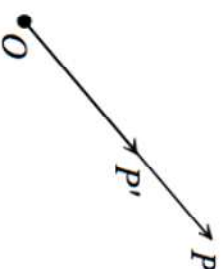
Omotetia

Sia O un punto del piano e k un numero reale non nullo. Una **omotetia** è una trasformazione geometrica piana che manda il punto P nel punto P' tale che $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.
 O e k sono detti, rispettivamente, il **centro** e il **rapporto** di omotetia. Essa si indica con $h_O = \mathcal{H}(O, k)$.

$k > 1$

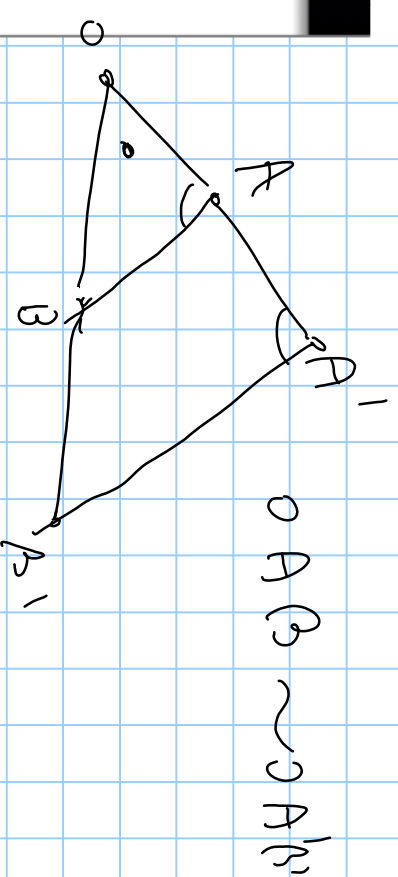


$0 < k < 1$



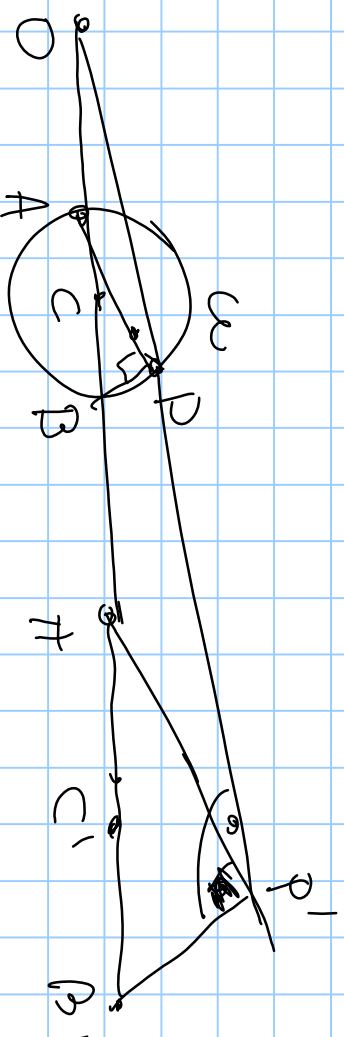
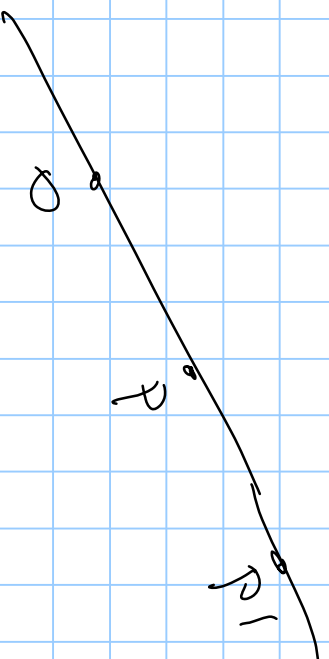
Omotetia: proprietà

- $A'B'/AB = |k|$, $AB \parallel A'B'$; ✗
- le *rette unite* di un'omotetia sono tutte e sole quelle passanti per il centro; ✗
- se due triangoli non congruenti hanno i lati orientati tali che ciascun lato dell'uno è parallelo al corrispondente lato dell'altro allora esiste una omotetia che manda un triangolo nell'altro;
- un'omotetia trasforma cerchi in cerchi; ✗
- la composizione di due omotetie con lo stesso centro e rapporti k_1 e k_2 è un'omotetia con lo stesso centro e di rapporto il prodotto $k_1 \cdot k_2$;
- la composizione di due omotetie con centri diversi e rapporti k_1 e k_2 con $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ è una omotetia con centro sulla retta passante per i due centri e rapporto $k_1 \cdot k_2$; se $k_1 \cdot k_2 = 1$ allora la composizione è una traslazione.



$$\frac{OA'}{OA} = |k| = \frac{OB'}{OB}$$

$$AB \parallel A'B'$$



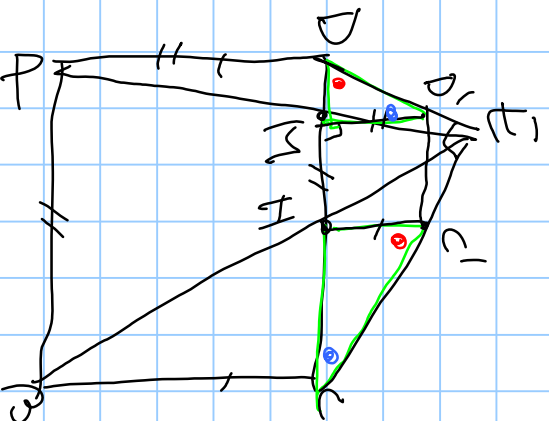
$$A \hat{P} B = A' \hat{P}' B'$$

$$P' \in u'$$

P' veduto $A'B'$
 sotto sguardo
 netto

1. Esternamente al quadrato $ABCD$ costruire il triangolo $\triangle DCE$ retto in E . Indichiamo con M ed N i punti di intersezione di DC con AE e BE rispettivamente. Se $DM = 20$ e $NC = 45$ calcolare MN .

$MN = ?$



$$h(E, k)$$

$$k = \frac{EM}{EA}$$

$$A \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow H = k \rightarrow A$$

$$B \rightarrow H$$

$$D \rightarrow D' \in ED$$

$$C \rightarrow C' \in EC$$

$$q(A \cap C \cap D) \rightarrow q(MN \cap C' \cap D')$$

$$MN = x$$

$$20 : x = x : 45$$

$$\boxed{x = 30}$$

2. In un triangolo rettangolo $\triangle ABC$, con $\angle A = 90^\circ$ e $\angle C = 60^\circ$ inscrivere il quadrato $PQMN$ con $P, Q \in BC$, $M \in AC$ ed $N \in AB$. Sia $O = BM \cap CN$ tale che la distanza tra O e BC vale 10. Calcolare la distanza di O da AB .

$$OH = ?$$

$$h(B, K)$$

$$H \rightarrow O$$

$$K = \frac{BO}{H}$$

$$P \rightarrow P' \in BC$$

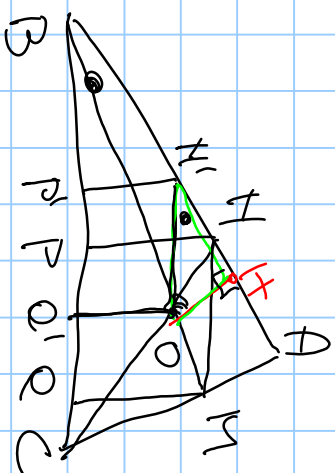
$$Q \rightarrow Q' \in BC$$

$$N \rightarrow N' \in BA$$

$$p(PQMN) \rightarrow q(P'Q'O H')$$

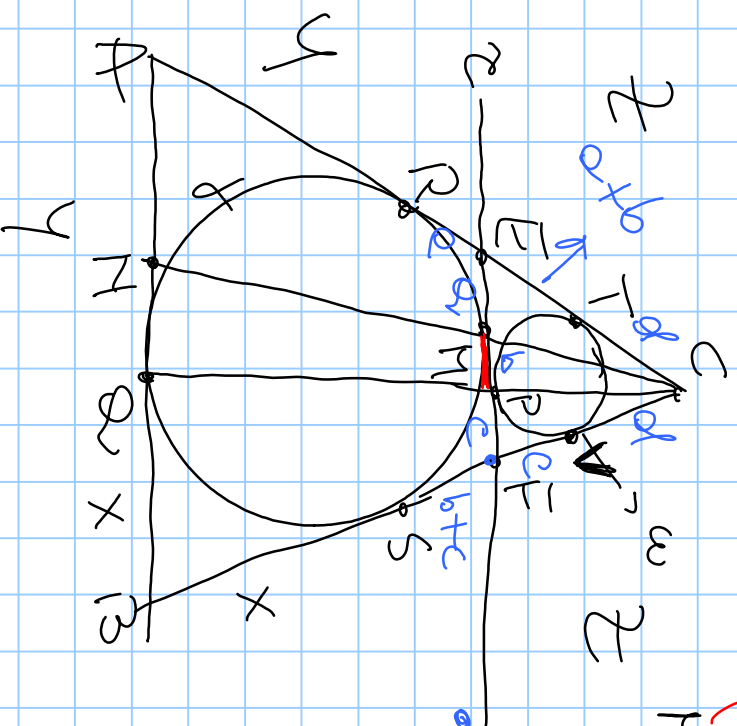
$$H'O H : 30/60/90$$

$$\underline{\underline{H'O = OQ' = 10}} \quad H'O = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$



4. In un triangolo $\triangle ABC$ è inscritta una circonferenza γ . Sia r la retta parallela ad AB e tangente a γ in M . La retta CM incontra AB in N . Se $AC = 9$, $BC = 7$ e $AB = 6$ calcolare AN .

$$AN = ?$$



$$h(e, k)$$

$$k = \frac{CA}{CE}$$

$$E \rightarrow A$$

$$h(w) = \begin{cases} AC \\ BC \\ AB \end{cases}$$

$$P(p, w, z) \rightarrow Q(p, f, AB)$$

$$CR = CS$$

$$a + a + b + a = a + c + b + c \Rightarrow 2a = c$$

$$EN = PF \Rightarrow h(EN) = h(PF)$$

$$AN = 2B$$

$$x + y + z = 11$$

$$X = 2$$

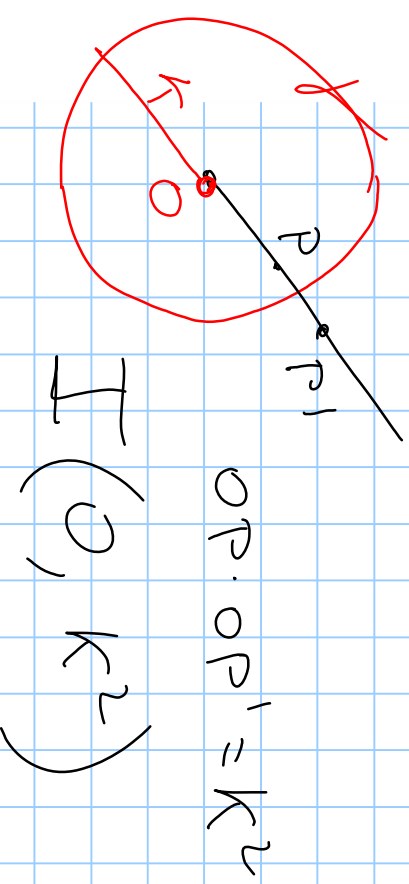
Inversione circolare

Data una circonferenza γ di centro O e raggio k si dice **inversione** la trasformazione geometrica piana che ad ogni punto $P \neq O$ associa il punto P' della semiretta OP tale che

$$OP \cdot OP' = k^2$$

La circonferenza γ è chiamata circonferenza di inversione mentre O e k^2 sono rispettivamente il **centro** e la **potenza** dell'inversione: essa è indicata con $I = I(O, k^2)$.

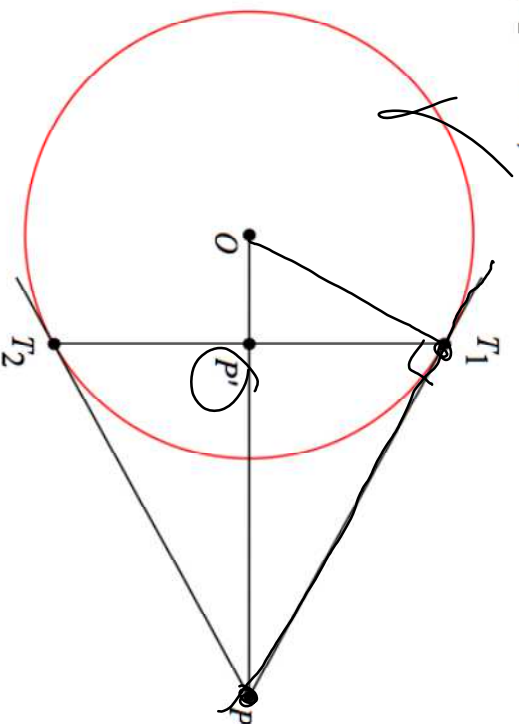
L'insieme di tutti i punti nei quali si trasformano i punti di una figura $\mathcal{F}$ per mezzo di un'inversione costituisce la figura $\mathcal{F}'$ detta *figura inversa* di $\mathcal{F}$.



Inversione: proprietà

Un'inversione $I = I(O, k^2)$ di centro O e potenza k^2 soddisfa le seguenti proprietà:

- I è una trasformazione involutoria, cioè $I \circ I$ è l'identità;
- se P è un punto esterno a γ e T_1, T_2 sono i punti di contatto delle tangenti a γ condotte da P allora $P' = T_1 T_2 \cap OP$;



$$I \circ I = \text{id}$$

$$T_1 P' \perp OP$$

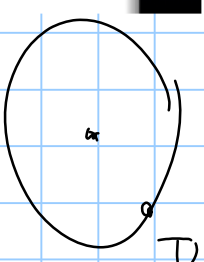
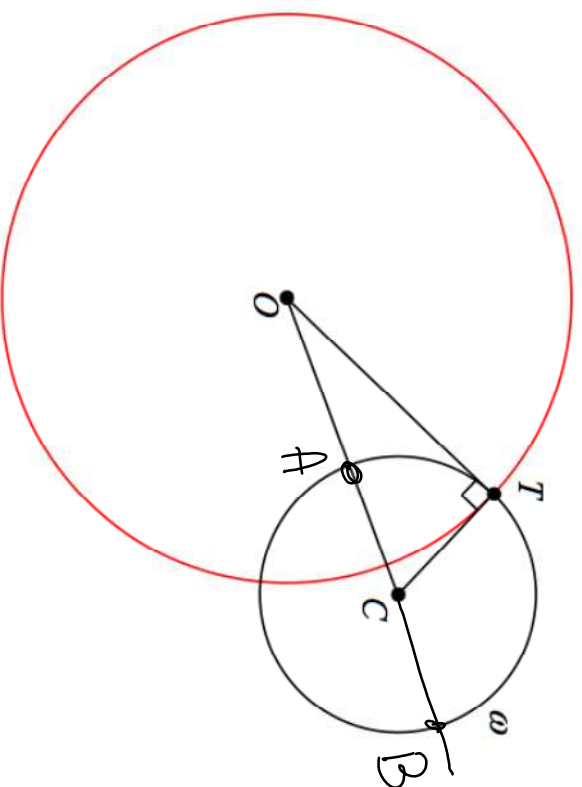
$$OP' \cdot OP = OT_1^2 = k^2$$

$$P \rightarrow P'$$

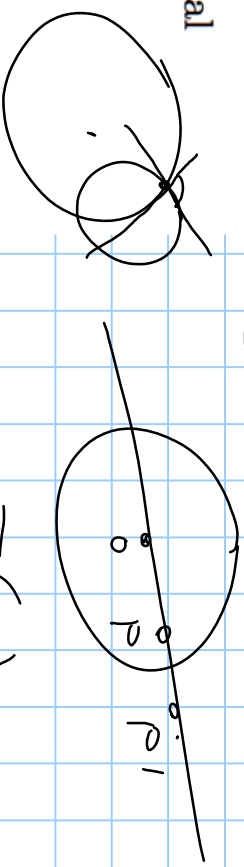
$$P' \rightarrow P$$

Inversione: proprietà

- I lascia fissi tutti i punti di γ ;
- I lascia fisse le rette passanti per O ;
- I lascia fisse tutte e sole le circonferenze ortogonali al cerchio di inversione



$$OP \cdot OP = k^2$$



$$\omega \perp \gamma \Rightarrow I(\omega) = \omega$$

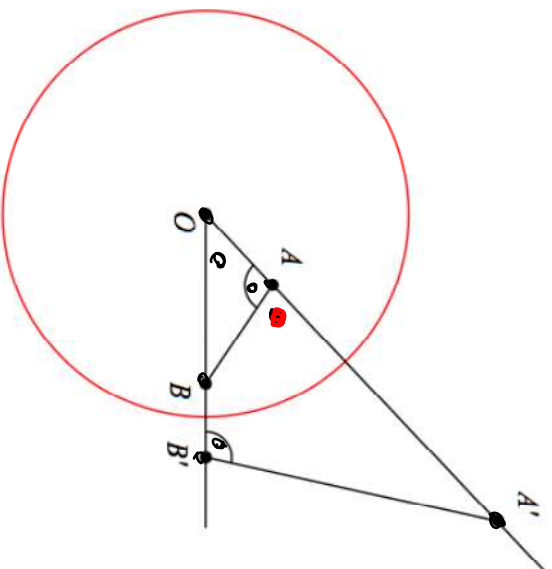
$$OA \cdot OB = OT^2 = k^2$$

$$A \xrightarrow{T} B$$

$$I(\omega) = \omega$$

Inversione: proprietà

- se $A' = I(A)$ e $B' = I(B)$ allora $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ ed il quadrilatero $ABB'A'$ è ciclico;



- $I = I(O, k^2)$ trasforma una circonferenza di centro O e raggio r in una circonferenza di centro O e raggio $r' = k^2/r$;

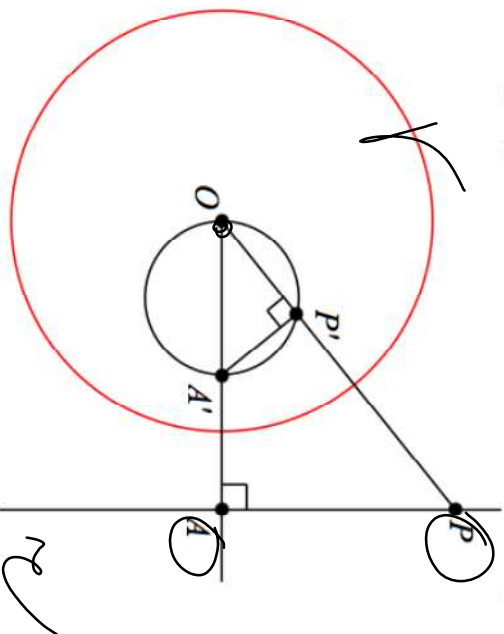
$$OA' \cdot OA = k^2 = OB' \cdot OB$$

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OB'A'}$$

Inversione: proprietà

- *I* trasforma ogni retta non passante per O in una circonferenza passante per O . Inoltre il suo diametro passante per O è perpendicolare alla retta data;



- *I* trasforma una circonferenza ω passante per O in una retta non passante per O . Inoltre questa retta è perpendicolare al diametro di ω passante per O ;

$$Z \rightarrow \text{event} = u$$

1. $A \rightarrow B$

$$p_1 \in \mathcal{P}_1, p_2 \in \mathcal{P}_2$$

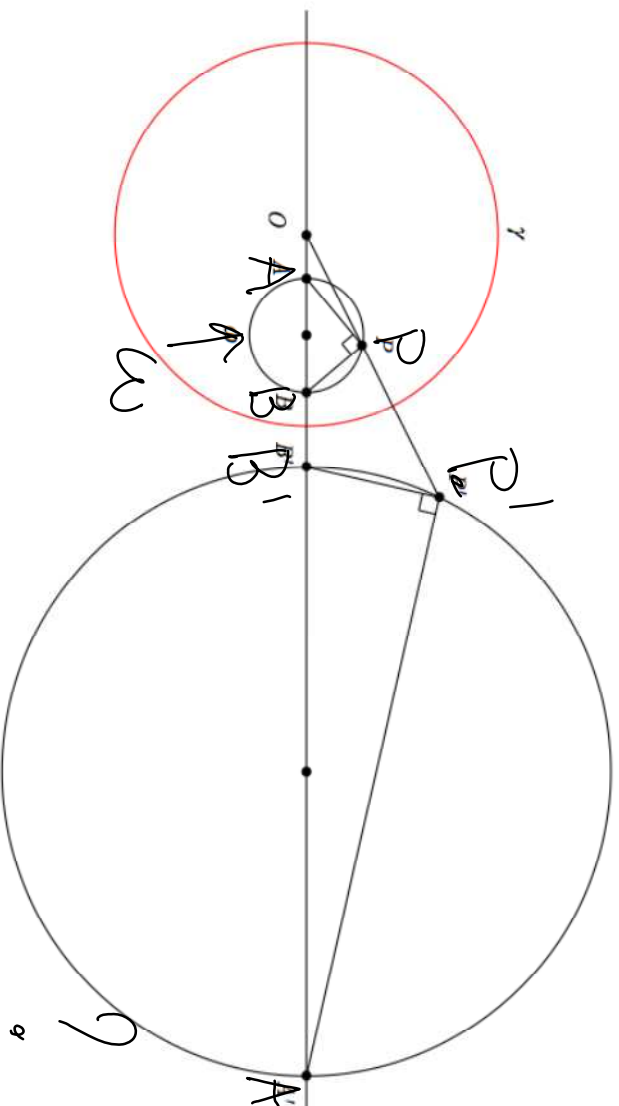
$\frac{0}{\text{A}} \rightarrow \frac{\text{A}}{0}$

1. Verfahren $\cap \theta$ notto

carpelo da 2ª
OA' e di ovetto

Inversione: proprietà

- I trasforma una circonferenza ω non passante per O in una circonferenza non passante per O ;



$$O \in A B$$

$$A \rightarrow A' \quad B \rightarrow B'$$

$$P \in \omega \quad P' = ?$$

$$\widehat{B'P'A'} = \widehat{OP'A'} - \widehat{OP'B'} =$$

$$= \widehat{OAP} - \widehat{OBP} =$$

$$A'P'B' = \widehat{APB} + \widehat{BP'P} - \widehat{AP'B'} =$$

$$= 30^\circ$$

$A'B'$ diviso

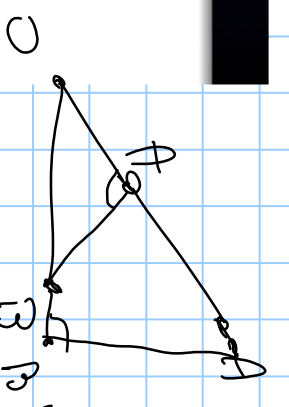
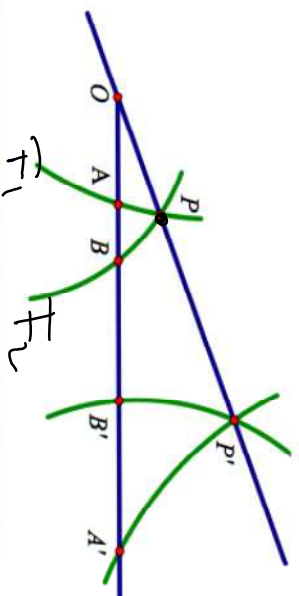
Inversione: proprietà

- I lascia fisse tutte le circonferenze ortogonali ad γ ;
- se $A' = I(A)$ e $B' = I(B)$ allora

$$A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$$

- I è un'applicazione *conforme* (inversa), ossia conserva gli angoli tra due figure ma ne cambia l'*orientazione*: se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ sono due figure (linee, circonferenze), allora

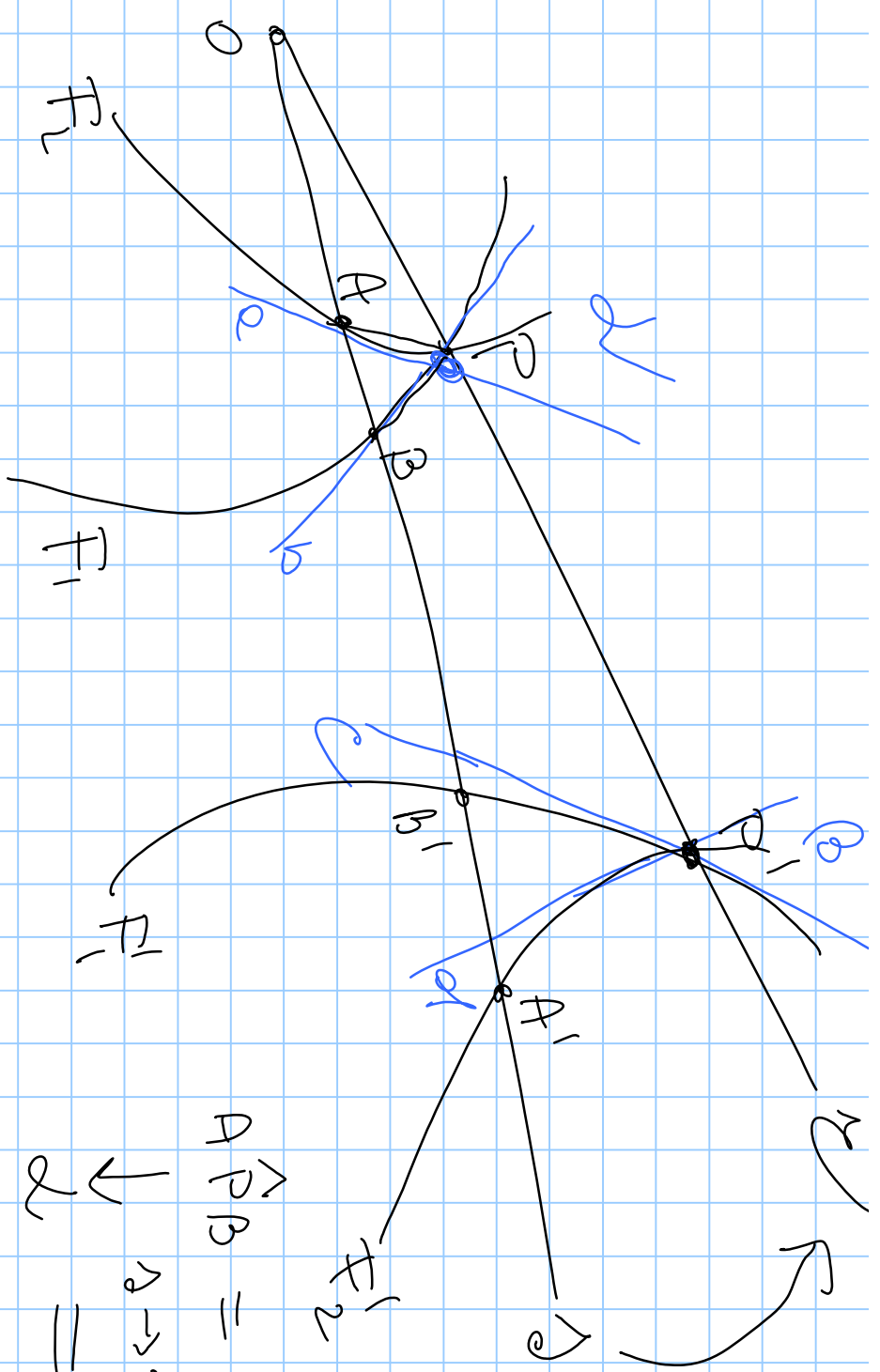
$$\angle(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \angle(I(\mathcal{F}_1), I(\mathcal{F}_2))$$



$$OA \cdot OB \sim OA' \cdot OB'$$

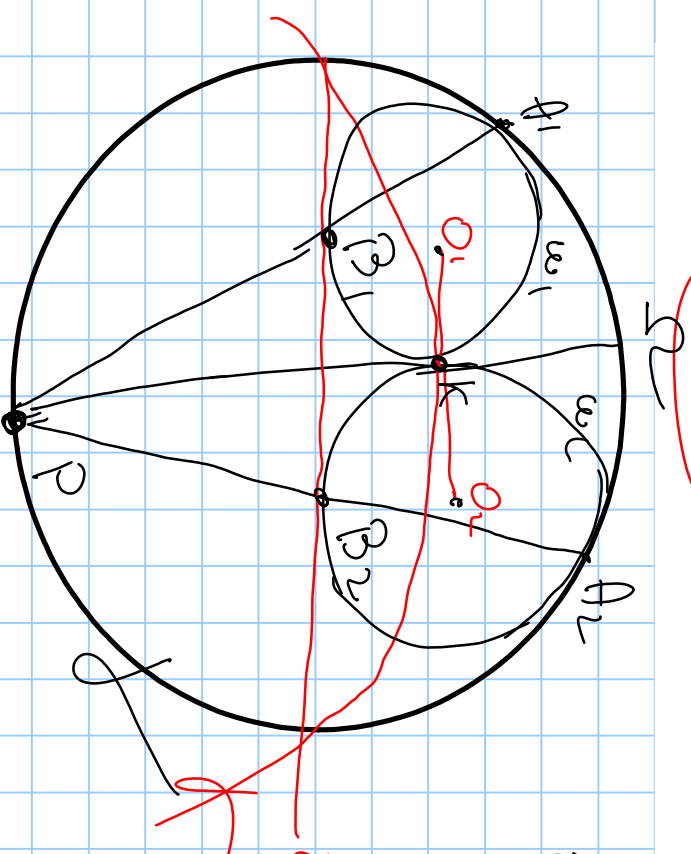
$$OA \cdot OA' = k^2$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{k^2}{OA \cdot OB}$$



$APB = P'A'A'$
 $\rightarrow$
 $\rightarrow$
 $\rightarrow$

1. Due cerchi ω_1 e ω_2 sono tangenti esternamente nel punto K ; essi sono anche tangenti internamente a un cerchio Ω nei punti A_1 e A_2 rispettivamente. Sia P uno dei punti di intersezione di Ω con la tangente comune a ω_1 e ω_2 nel punto K . La retta PA_1 interseca ω_1 ulteriormente in B_1 e la retta PA_2 interseca ω_2 ulteriormente in B_2 . Dimostrare che B_1B_2 è una tangente comune ad ω_1 e ω_2 . (British MO 1996)



$I(P, PK^2)$ K centro

$$PA_1 \cdot PB_1 = PK^2 = PA_2 \cdot PB_2$$

$$A_1 \rightarrow B_1 \quad A_2 \rightarrow B_2$$

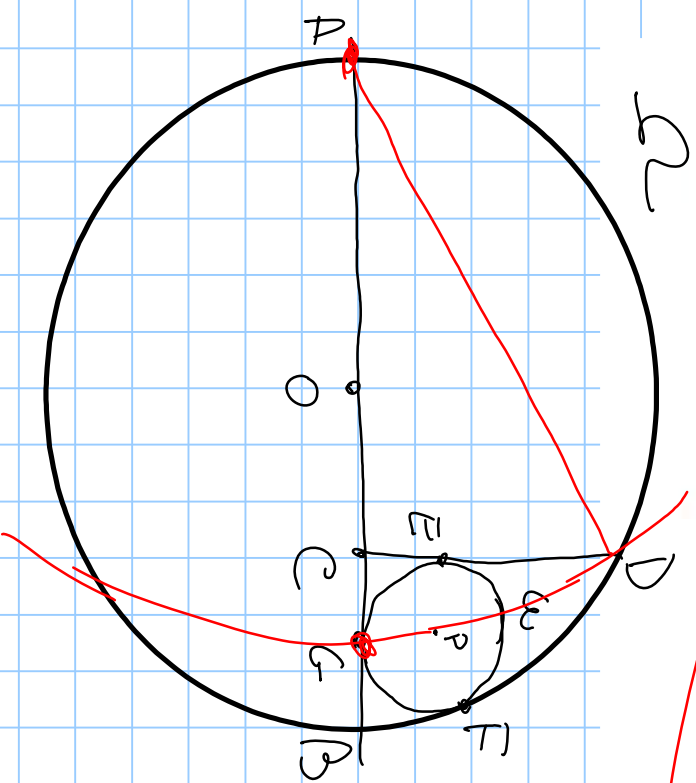
$$\Omega(A_1, A_2, P) \quad I(\Omega)(B_1, B_2) \equiv B_1B_2$$

ω_1 e ω_2 sono $\perp$ perpendicolarmente

$$A_1(\overline{tp} \omega_1 \text{ e } \Omega) \rightarrow \underline{\underline{B_1}}(\overline{tp} \omega_1 \text{ e } B_1A_2)$$

analogo per ω_2

2. Sia dato un semicerchio Ω di centro O e diametro AB e sia C un arbitrario punto del segmento OB . Sia D il punto del semicerchio tale che CD è perpendicolare ad AB . Un cerchio ω con centro P è tangente all'arco BD in F e ai segmenti CD , AB in E , G rispettivamente. Dimostrare che il triangolo ADG è isoscele.



$$\overline{AD} = \overline{AG} \quad \uparrow \quad \text{---} \quad \eta$$

(Cesenatico 2003)

$$I(A, AD^2)$$

$$A \text{---} B \quad \text{---} D \text{ fuori } \quad AD^2 = AC \cdot AB \quad C \rightarrow B \quad \checkmark$$

$$\Omega (A, D, B) \rightarrow DC \xrightarrow{\quad} \widehat{DB} \rightarrow DC \quad \checkmark$$

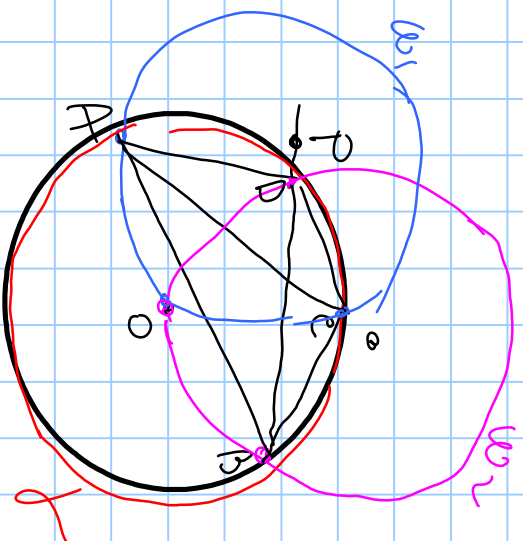
$$A \text{---} B \text{ fuori } DC$$

$$\omega \left\{ \begin{array}{l} \widehat{DB} \\ \widehat{AB} \end{array} \right\} \rightarrow I(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{DB} \\ \widehat{AB} \end{array} \right\} \equiv \omega$$

$$I(G) = G \Rightarrow G \in \gamma \quad AG = AD.$$

3. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di centro O . Le diagonali AC e BD non passano per O . Se il centro P della circonferenza ω_1 circoscritta ad $\triangle AOC$ giace sulla retta BD , dimostrare che il centro Q della circonferenza ω_2 circoscritta a $\triangle BOD$ giace sulla retta AC .

retta AC .



$$\perp (O, A, O^2)$$

$$\omega_1 \rightarrow AC$$

$$A, B, C, D \text{ beni}$$

$$\omega_2 \rightarrow DB$$

$$Vid.$$

$$\omega_1 \perp BD$$

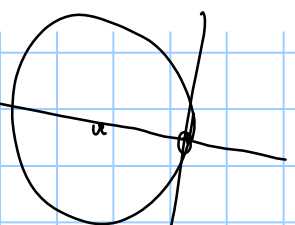
$$\omega_2$$

$$\Rightarrow AC \perp \omega_2$$

$$Q \in AC$$

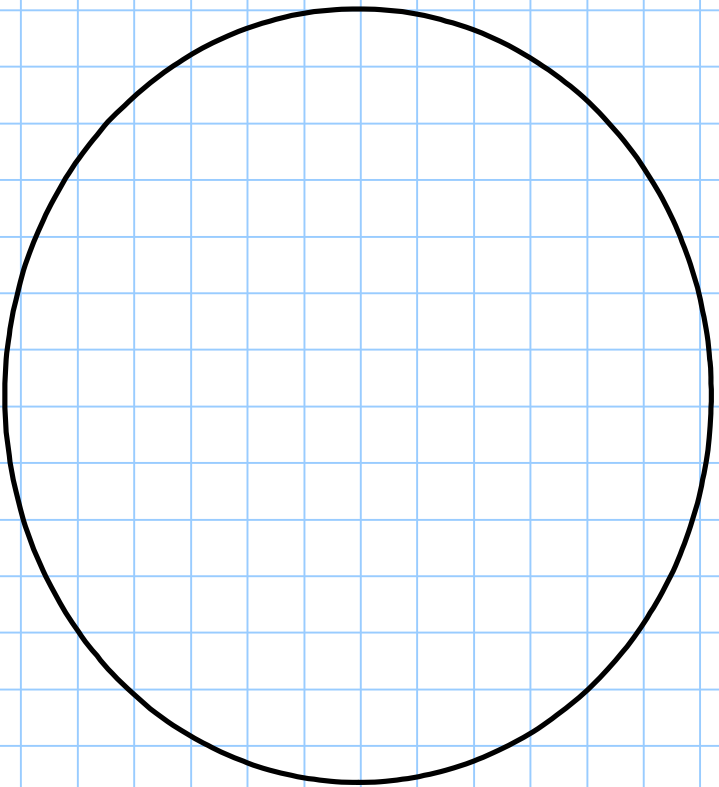
$$\equiv$$

$$Q \in AC?$$

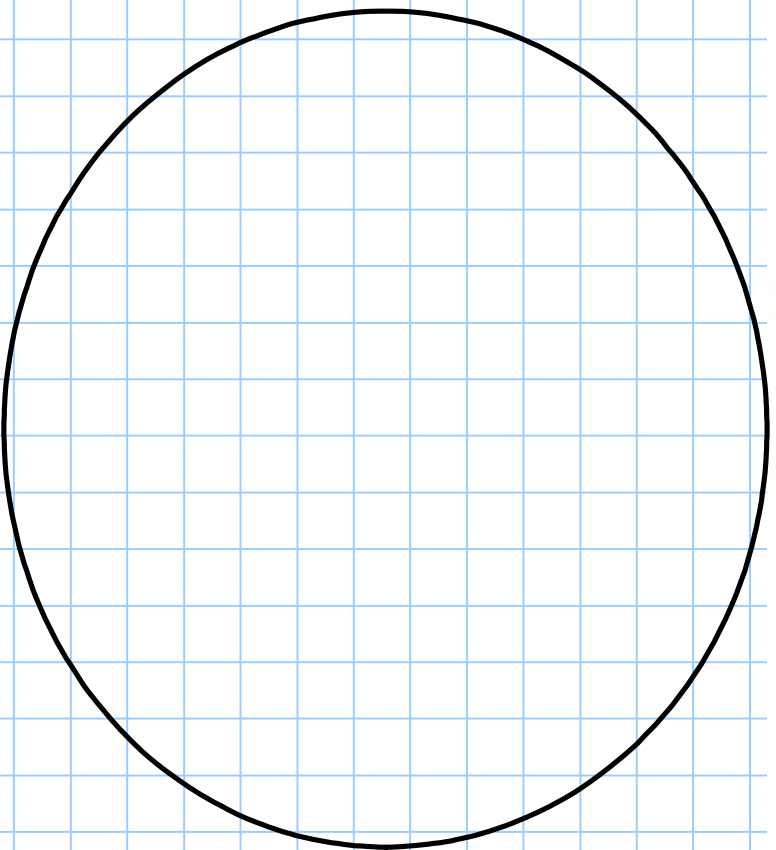


4. Sia ABC un triangolo con $\angle BAC = 90^\circ$ e sia L un punto del segmento BC . Le circonferenze $\omega_1 = \odot(ABL)$, $\omega_2 = \odot(CAL)$ intersecano le rette AC , AB in M ed N rispettivamente (oltre che in A). Dimostrare che i punti L , M ed N sono allineati. (British MO 2010)

6. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze relative ai lati BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che le perpendicolari condotte da A, B, C rispettivamente su EF, FD, DE sono concorrenti.



7. In un triangolo $\triangle ABC$, sia H l'ortocentro, sia M il punto medio di BC e sia K la proiezione ortogonale di H su AM . Se N è il simmetrico di K rispetto a BC , dimostrare che N giace sulla circonferenza Ω circoscritta ad $\triangle ABC$.



Bibliografia

- ① M. Gobbino, *Schede olimpiche*, U.M.I, Bologna (2010)
- ② I. D'Ignazio, E. Suppa *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*, Teramo, Interlinea Editrice (2001)
- ③ B. Poon, *Geometry Transformations*, IMOHK Training (2006)
- ④ C. W. Dodge, *Euclidean Geometry and Transformations*, Dover Publications, New York (2004)
- ⑤ I.M. Yaglom, *Geometric Transformations IV*, Anneli Lax New Mathematical Library MAA, 2009
- ⑥ F.J.G. Capitan, *Inversión en Olimpiadas*, <http://www.oei.es/historico/oim/numero27/probinv.pdf>
- ⑦ Dušan Djukić, *Inversion*, <http://imomath.com/index.php?options=323>

Grazie dell'attenzione!

*Lo scopo della geometria analitica
è quello di sostituire al genio la pazienza,
badando però di non abusarne!*

CARTESIO (1596-1650)