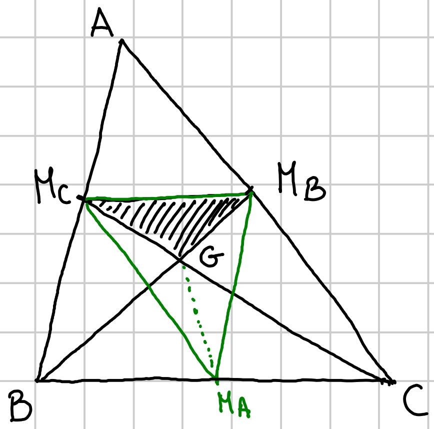
GEOMETRIA - ESERCIZI

Titolo nota 17/10/2017

Esercizio 1



$A_{M_C G M_B} = 50\, m^2$

$A_{ABC} = ?$

Notiamo che $A\hat{M_C}M_B$, $M_C\hat{M_B}M_A$, $M_B\hat{M_A}C$ e $M_C\hat{M_A}B$ sono congruenti.

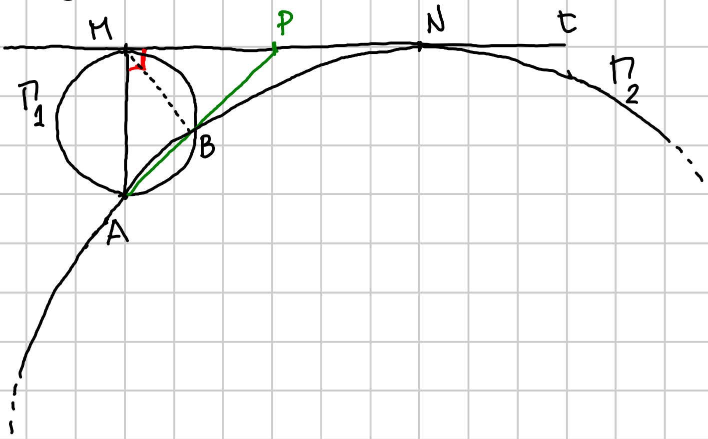
$A_{ABC} = 4\, A_{M_C M_B M_A}$

G è baricentro del triangolo $M_A\hat{M_B}M_C$

$A_{M_C G M_B} = A_{M_B G M_A} = A_{M_C G M_A} = \frac{1}{3} A_{M_A M_B M_C} = \frac{1}{12} A_{ABC}$

In fine $A_{ABC} = 12\, A_{M_C M_B G} = 600\, m^2$

Esercizio 2



$MA \perp MN$
$MN = 2\,MA$
$N\hat{M}B = ?$

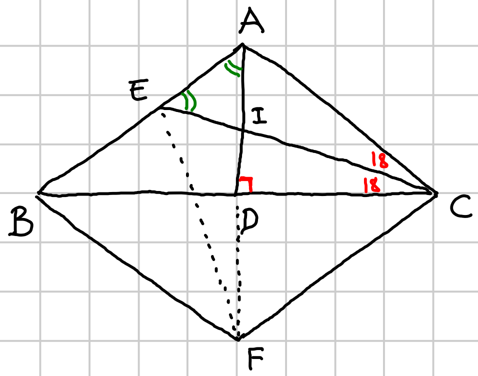
$N\hat{M}B = M\hat{A}B$ perché angoli alla circonferenza sottesi da MB

Sia P il punto di intersezione tra AB e MN.
Guess: $PM = MA$

$$\left.\begin{aligned} PM^2 &= PB \cdot PA \\ PN^2 &= PB \cdot PA \end{aligned}\right\} \quad PM = PN \quad \Rightarrow \quad PM = \frac{MN}{2} = MA$$

$M\hat{P}A$ è rettangolo isoscele $\Rightarrow M\hat{A}B = M\hat{A}P = N\hat{M}B = 45°$

Esercizio 3



$AB = AC$ $\quad AD = 3$

$A\hat{C}E = E\hat{C}B = 18°$ $\quad CE = ?$

$A\hat{C}B = A\hat{B}C = 36°$

$B\hat{A}C = 180° - 36 \cdot 2 = 108°$

$B\hat{A}I = I\hat{A}C = 54°$

Triangolo $\overset{\triangle}{ACE}$: $A\hat{E}C = 180° - 108° - 18° = 54°$

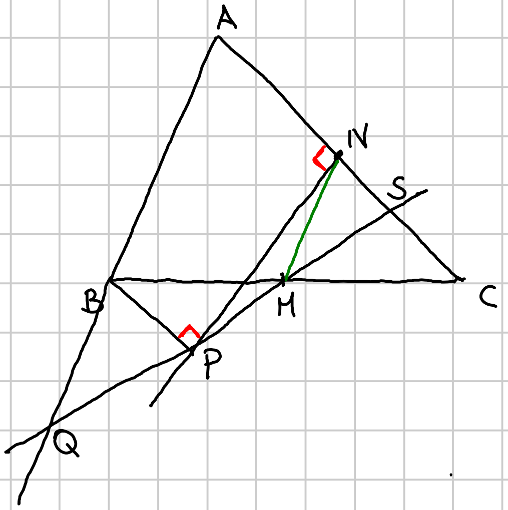
Scopriamo che $A\hat{E}I = E\hat{A}I$, cioè $\overset{\triangle}{AEI}$ è isoscele sulla base AE, cioè $IE = AI$.

Costruiamo il punto F simmetrico di A rispetto a BC.
$ABFC$ è un rombo, $AE \parallel CF$

I triangoli $\overset{\triangle}{AIE}$ e $\overset{\triangle}{FIC}$ sono simili
$\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{FIC}$ è isoscele sulla base FC
$FI = IC$

$CE = CI + IE = FI + AI = AF = 2AD = 2 \cdot 3 = 6.$

Esercizio 4



Tesi : $Q\hat{P}B$ isoscele

$AN \parallel BP$

Consideriamo il punto S intersezione tra PM e AC

La tesi è equivalente a mostrare che $A\hat{S}Q$ è isoscele.

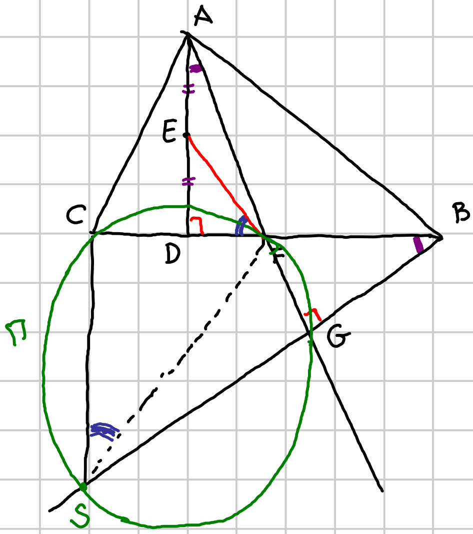
$MN \parallel AB \Rightarrow$ la tesi è equivalente a mostrare che $M\hat{N}S$ è isoscele.

Notiamo che $PM = MS$ perché $B\hat{P}M \cong C\hat{S}M$

$P\hat{N}S$ è rettangolo e M è il punto medio dell'ipotenusa

$\Rightarrow \quad MP = MN = MS$, cioè $M\hat{N}S$ è isoscele

Esercizio 5



$AE = ED$
$CF = FB$
$AF \perp BG$

Tesi: EF Tange la circonferenza circoscritta a $\triangle CFG$.

Idea: se dimostriamo che $C\hat{G}F = E\hat{F}C$ abbiamo finito (angoli alla circonferenza)

Consideriamo $\triangle AFD$ e $\triangle FGB$: sono rettangoli e $A\hat{F}D = G\hat{F}B \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle BFG$.

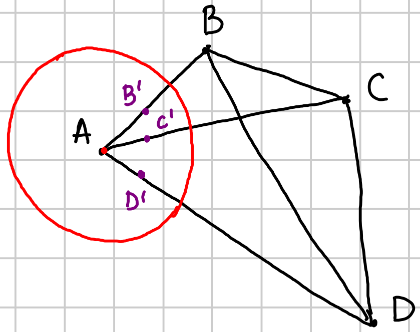
Costruiamo il punto S intersezione tra Γ e BG ($\neq G$)
$B\hat{C}S = 90°$ (CFGS è ciclico e $F\hat{G}S = 90°$)

I triangoli $\triangle BFG$ e $\triangle BSC$ sono simili.
$\Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle BSC$

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ punto medio di } BC \\ E \text{ punto medio di } AD \end{array}\right\} \quad \triangle EFD \text{ è simile a } \triangle FSC.$$

$E\hat{F}D = F\hat{S}C = F\hat{G}C$ e questa è la tesi.

Esercizio 6



Teorema di Tolomeo

Dimostrare:

$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$

Inverto con centro A e raggio r:

B' immagine di B, ...

$AB' = \dfrac{r^2}{AB}$ $\quad AC' = \dfrac{r^2}{AC}$ $\quad AD' = \dfrac{r^2}{AD}$

$CD = \dfrac{r^2}{AC' \cdot AD'} \cdot C'D'$

$BC = \dfrac{r^2}{AB' \cdot AC'} \cdot B'C'$ $\quad BD = \dfrac{r^2}{AB' \cdot AD'} \cdot B'D'$

$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$

$\Updownarrow$

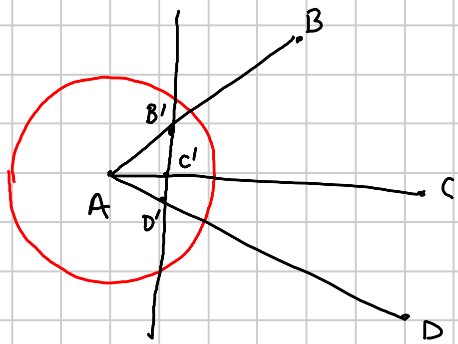
$$\frac{r^2}{AB'} \cdot \frac{r^2}{AC' \cdot AD'} \cdot C'D' + \frac{r^2}{AB' \cdot AC'} \cdot B'C' \cdot \frac{r^2}{AD'} \geq \frac{r^2}{AC'} \cdot \frac{r^2}{AB' \cdot AD'} \cdot B'D'$$

$\Updownarrow$

$C'D' + B'C' \geq B'D'$ è vera (disuguaglianza triangolare)

Quando vale l'uguaglianza?

Se e solo se B', C', D' sono allineati



la retta per B', C', D' tramite l'inversione viene mandata nella circonferenza per B, C, D, A

Cioè: ABCD è ciclico $\Leftrightarrow$ vale l'uguaglianza.
(in questo ordine)