Esercizi di Geometria

Incontri Olimpici 2017 - Montecatini Terme

Esercizio 1. In un triangolo ABC indichiamo con M_B ed M_C i punti medi dei lati AC ed AB, rispettivamente. Se G è il baricentro di ABC e l'area del triangolo M_CGM_B è uguale a $50m^2$, quanto vale l'area del triangolo ABC?

Esercizio 2. Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 si intersecano nei punti A e B. Sia t una tangente comune alle due circonferenze, che incontra Γ_1 e Γ_2 rispettivamente nei punti M ed N. Supponiamo che MA sia perpendicolare ad MN e che valga $MN = 2MA$. Quanto misura l'angolo $\widehat{NMB}$?

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo isoscele sulla base BC e sia D il piede dell'altezza di ABC uscente dal vertice A. Il punto E appartiene al lato AB ed è tale che $\widehat{ACE} = \widehat{ECB} = 18°$. Se $AD = 3$, quanto misura il segmento CE?

Esercizio 4. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano M il punto medio di BC e P la proiezione di B sull'asse del segmento AC. La retta PM incontra la retta AB nel punto Q. Dimostrare che il triangolo QPB è isoscele.

Esercizio 5. Sia ABC un triangolo con $AB > AC$. Chiamiamo D il piede dell'altezza da A a BC, E ed F i punti medi di AD e BC rispettivamente e G il piede della perpendicolare da B ad AF. Dimostrare che EF tange in F la circonferenza passante per G, C, F.

Esercizio 6 (Teorema di Tolomeo)**.** Sia $ABCD$ un quadrilatero; dimostrare che

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se $ABCD$ è ciclico.

Hint: si può ottenere la tesi utilizzando la tecnica delle inversioni circolari. Provare ad applicare un'inversione circolare di centro A e raggio r (qualsiasi): come si trasforma la disguaglianza?